1. soutěžní série – řešení

1. Ano, například se stranami $1, 1, 2, 4, 8, \dots, 2^{98}, 2^{99} - 1$. Když vynecháme nejdelší stranu, bude vždycky nejdelší strana zbylého n-úhelníku alespoň tak dlouhá, jako součet všech ostatních, což poruší ostrou „mnohoúhelníkovou nerovnost“. V opačném případě: nejdelší strana $2^{99} - 1$ je jen o 1 kratší než součet ostatních, takže když ji nevynecháme a vynecháme libovolnou jinou, tak už bude aspoň tak dlouhá co ostatní.

2. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. Nerovnost ze zadání je po úpravě

$$\frac{m}{(m-n+1)!} > \frac{1}{n(m-1-n)!},$$

což přejde v $mn > (m-n)(m-n+1)$, po úpravě $m^2 + m(1-3n) + n^2 - n < 0$. Tuto nerovnost splňují reálná čísla z intervalu $(\frac{1}{2}(3n - 1 - \sqrt{5n^2 - 2n + 1}), \frac{1}{2}(3n - 1 + \sqrt{5n^2 - 2n + 1}))$. Pro velká n je diskriminant kladný a interval obsahuje aspoň jedno celé číslo a největší z celých čísel v intervalu je

$$M(n) = \left\lfloor \frac{1}{2}(3n - 1 + \sqrt{5n^2 - 2n + 1}) \right\rfloor.$$

Evidentně $\lim \frac{M(n)}{n} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. Přesněji, celé části se zbavíme tak, že $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, spočítáme limity 2 posloupností bez celé části, které svírají $M(n)$ mezi sebou a použijeme větu o dvou strážnících.

3. $f_{a,b}(x) = \frac{(9x+1)^a \cdot 10^b - 1}{9}$, a nezáporné celé, $b \geq 1 - a$ celé. Uvědomíme si, že číslo tvořené k jedničkami je $\frac{10^k - 1}{9} = x_k$. Rozmyslete si, že $f_{a,b}$ zobrazí číslo tvořené k jedničkami na číslo tvořené $ak+b$ jedničkami. Zbývá dokázat, že žádné další polynomy nevyhovují. Pro konstantní polynomy je to zřejmé. Dále uvažujme obecný polynom $f(x) = a_m x^m + \dots + a_0$ stupně $m \geq 1$. Pak $\log(f(x)) = m \log x + a_m + o(1)$ pro $x \to +\infty$, tj.

$$\log(f(x_k)) = mk - m \log 9 + a_m + o(1) = mk + \log(9^{-m} a_m) + o(1)$$

pro $k \to +\infty$. Tento výraz má být roven logaritmu nějakého jedničkového čísla $x_{g(k)}$, což je $g(k) - \log 9 + o(1)$, tj. dostáváme rovnost $mk + \log(9^{-m} a_m) + o(1) = g(k) - \log 9 + o(1)$, neboli $mk - g(k) = -\log 9 - \log(9^{-m} a_m) + o(1)$. Limita pro $k \to +\infty$ pravé strany je $-\log 9 - \log(9^{-m} a_m)$. Na levé straně máme $mk - g(k)$, což je posloupnost celých čísel, tyto tedy musí být pro velká k všechny rovny $-\log 9 - \log(9^{-m} a_m) = -\log(9^{1-m} a_m) = r$ a r musí být také celé číslo. Pro velká k tedy máme $g(k) = mk + r$ a $f(x_k) = x_{mk+r}$. Poslední rovnost však splňuje i polynom $f_{m,r}$, který se tak s f shoduje v nekonečně mnoha bodech, a tudíž $f \equiv f_{m,r}$, důkaz je hotov.

4. Vytvoříme postupně číslo $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, kde $p_1, p_2, \dots, p_k$ jsou různá prvočísla. Chceme, aby bylo soudělné se všemi prvky M. Takže se v i-tém kroku podíváme, jestli jsou už všechna čísla z M soudělná s n, a když některé není, tak přidáme nějaké prvočíslo z jeho rozkladu do n jako p_i. Až vyčerpáme všechny prvky M, máme n, které je se všemi soudělné, takže musí mít podle zadání v M dělitele, označme ho a.

Číslo a se skládá z některých prvočísel z množiny $p_1, p_2, \dots, p_k$, vybereme z nich to s nejvyšším indexem: p_j. Tedy $p_j \mid a \mid p_1 p_2 \cdots p_j$. V j-tém kroku postupu z předchozího odstavce jsme našli číslo nesoudělné s $p_1 p_2 \dots p_{j-1}$, ale dělitelné p_j, označme to číslo b. Čísla a, b tedy mají největší společný dělitel p_j.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`