1. soutěžní série

7. 10. 2024

Úloha 1. Rozhodněte, zda pro nějaký stoúhelník platí, že pro žádné $n < 100$ není možné vybrat n jeho stran a složit z nich n-úhelník (mnohoúhelníkem máme na mysli nedegenerovaný mnohoúhelník).

(5 bodů)

Úloha 2. Pro kladné celé číslo n označme $M(n)$ největší celé číslo m splňující

$$\binom{m}{n-1} > \binom{m-1}{n}.$$

Vypočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n}.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Kladné celé číslo nazveme *jedničkové*, jestliže jeho dekadický zápis obsahuje pouze jedničky. Najděte všechny polynomy f s reálnými koeficienty, které zobrazí každé jedničkové číslo na jedničkové číslo.

(10 bodů)

Úloha 4. V konečné množině M jsou celá čísla větší než 1. Každé kladné celé číslo má v M buď dělitele, nebo nesoudělné číslo. Dokažte, že existují $a, b \in M$ taková, že je $\gcd(a, b)$ prvočíslo. (15 bodů)

1st contest series

October 7, 2024

Problem 1. Decide whether there exists a polygon with 100 vertices with the following property: it is not possible to choose some n (for any $n \in \{3, 4, \dots, 99\}$) of its sides and rearrange them to form an n-gon (polygon means a non-degenerate polygon). (5 points)

Problem 2. Given a positive integer n, let $M(n)$ be the largest integer m such that

$$\binom{m}{n-1} > \binom{m-1}{n}.$$

Evaluate

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{n}.$$

(10 points)

Problem 3. A *repunit* is a positive integer whose digits in base 10 are all ones. Find all polynomials f with real coefficients such that if n is a repunit, then so is $f(n)$. (10 points)

Problem 4. Let $M \subset \{2, 3, 4, \dots\}$ be a finite set with the following property: for each positive integer n there exists $m \in M$ such that $m|n$ or $gcd(m, n) = 1$. Prove that there exist $a, b \in M$ such that $\gcd(a, b)$ is a prime. (15 points)