2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 4.11.2024

Úloha 1. Buď $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že pro každý čtverec $ABCD$ v rovině platí $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Plyne odtud, že $f(P) = 0$ pro každý bod P roviny?

Úloha 2. Buď $\varepsilon < 1$ kladné reálné číslo a označme B_ε množinu všech reálných čísel, jejichž vzdálenost od nejbližšího celého čísla je nejvýš ε. Dokažte, že existuje kladné celé číslo m takové, že pro každé reálné číslo x mají množiny $A_x = \{x, 2x, 3x, \ldots, mx\}$ a B_ε neprázdný průnik.

Úloha 3. Buď $A_1A_2A_3A_4$ čtyřúhelník vepsaný kružnici se středem O. Nechť $B_1B_2B_3B_4$ je čtyřúhelník, který obsahuje $A_1A_2A_3A_4$ ve svém vnitřku a pro $i = 1, 2, 3, 4$ je B_iB_{i+1} rovnoběžná s A_iA_{i+1} ve vzdálenosti $|A_iA_{i+1}|$ od ní (přičemž $A_5 = A_1$, $B_5 = B_1$). Protože $B_1B_2B_3B_4$ má stejné velikosti úhlů jako $A_1A_2A_3A_4$, je také tětivový a označme P střed kružnice jemu opsané. Ukažte, že přímky A_1A_3, A_2A_4 a OP mají společný bod.

Úloha 4. Nechť p je prvočíslo a m kladné celé číslo, které není dělitelné p. Ukažte, že koeficienty polynomu $(1 + x + \cdots + x^{m-1})^{p-1}$, které nejsou dělitelné p jsou střídavě 1 a -1 modulo p. Např. $(1 + x + x^2 + x^3)^4 \equiv 1 - x + x^4 - x^6 + x^8 - x^{11} + x^{12} \pmod 5$.

Úloha 5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má spojitou třetí defivaci na $\mathbb{R}$ a $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ jsou kladné pro všechna x. Předpokládejme, že $f'''(x) \leq f(x)$ pro všechna x. Ukažte, že $f'(x) < 2f(x)$ pro všechna x.

Úloha 6. Označme a_n počet rovnostranných trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech dané n-dimenzionální krychle. Vypočtěte $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{8^n}$.

2nd home series

Solutions will be presented at the seminar on November 4, 2024.

Problem 1. Let $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that for every square $ABCD$ in the plane, $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Does it follow that $f(P) = 0$ for all points P in the plane?

Problem 2. Let $\varepsilon < 1$ be a positive real number and let B_ε denote the set of real numbers that differ from their nearest integer by at most ε. Prove that there exists a positive integer m such that for any real number x, is the intersection of the sets $A_x = \{x, 2x, 3x, \ldots, mx\}$ and B_ε non-empty.

Problem 3. Let $A_1A_2A_3A_4$ be a quadrilateral inscribed in a circle with center O. Let $B_1B_2B_3B_4$ be the quadrilateral that contains $A_1A_2A_3A_4$ in its interior such that, for $i = 1, 2, 3, 4$ is B_iB_{i+1} parallel to A_iA_{i+1} at distance $|A_iA_{i+1}|$ from it (with $A_5 = A_1$, $B_5 = B_1$). Because $B_1B_2B_3B_4$ has the same angles as $A_1A_2A_3A_4$, there is a circle in which it is inscribed. Let P be the center of that circle. Show that A_1A_3, A_2A_4, and OP are concurrent.

Problem 4. Let p be a prime number, and let m be a positive integer not divisible by p. Show that the coefficients of $(1 + x + \cdots + x^{m-1})^{p-1}$ that are not divisible by p are alternately 1 and -1 modulo p. For example, $(1 + x + x^2 + x^3)^4 \equiv 1 - x + x^4 - x^6 + x^8 - x^{11} + x^{12} \pmod 5$.

Problem 5. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ have continuous third derivative and $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ are positive for all x. Suppose that $f'''(x) \leq f(x)$ for all x. Show that $f'(x) < 2f(x)$ for all x.

Problem 6. Let a_n be the number of equilateral triangles with vertices in the vertices of a given n-dimensional cube. Compute $\lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{8^n}$.
