2. soutěžní série – řešení

1. Sporem. Kdyby $|c_n| = |a_{n+1} - a_n| \leq M$ pro všechna n, pak $a_n \leq a_1 + (n-1)M$. Pak ale $0 < b_n < \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_1 - M}{n} + M$, což je spor s neomezeností b_n.

2. Možnosti jsou $(5,6)$, $(6,5)$. Označme a,b kořeny $x^2 - mx + n$ a c, d kořeny $x^2 - nx + m$. Vietovy vztahy dohromady dávají

$$a + b = m = cd; \quad ab = n = c + d.$$

Kořeny musí být kladné: součet a a b je kladné číslo m, tedy aspoň jedno z nich je kladné, dále je jejich součin kladné číslo n, tedy musí být kladné obě. Stejně pro c a d. Odečtením a přeuspořádáním Vietových vztahů dostaneme

$$(a-1)(b-1) + (c-1)(d-1) = 2.$$

Čísla v závorkách jsou nezáporná, čili jsou pouze možnosti $a = b = c = d = 2$ (dvojnásobné kořeny) a $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d =$cokoliv (a symetrické). Pak už dourčíme $d = 5$.

3. Nejprve si rozmysleme, že pro každé prvočíslo p a přirozené a, které je s p nesoudělné, platí $P(a^p) \equiv P(a) \pmod p$. Dle Malé Fermatovy věty je totiž $a^p \equiv a \pmod p$, tedy $(a^p)^n = (a^n)^p \equiv a^n \pmod p$, tj. $P(a^p) = \sum b_j (a^p)^j \equiv \sum b_j a^j = P(a)$. Nyní zvolme libovolné prvočíslo $p > 2$ a libovolné přirozené k. Pro $n = pk$ splňuje polynom ze zadání $pk \mid P(2^{pk})$, tj. $P((2^k)^p) \equiv 0 \pmod p$. Pak ale také $P(2^k) \equiv 0 \pmod p$. To ale platí pro každé prvočíslo $p > 2$, tj. nutně $P(2^k) = 0$. To ale platí pro každé přirozené k, tedy P je nulový.

4. Vyhraje Bob. Myšlenka je, že obarví zbylé vrcholy pravidelného n-úhelníka, jehož první vrchol je první Alicin bod. Pak už bude každý oblouk kratší než $2\pi/n$ a posledním tahem vytvoří oblouk o délce libolvoně blízké $2\pi/n$, čímž vyhraje.

Přesněji: Bob obarvuje vrcholy pravidelného n-úhelníka, dokud může. Označme k počet vrcholů, které získá pro sebe. Když už vrcholy dojdou, dává postupně své body na oblouky n-úhelníka („strany“), jejichž oba krajní body jsou Aliciny („Aliciny strany“), čímž jí přeruší všechny oblouky délky $2\pi/n$. Alice má $n-k$ vrcholů n-úhelníka a Bob aspoň jeden, čili Aliciných stran je nejvýše $n-k-1$. Bobovi tedy ještě zbyde alespoň jeden bod. Když mu jich zbyde víc, dá všechny kromě posledního na libovolnou stranu, na které už nějaký bod obarvený je, aby nepřerušil žádnou svoji stranu (taková strana existuje: pokud by musel Bob jako první dát bod mimo vrchol, znamená to, že má Alice většinu vrcholů, čili dá Bob nejprve na Alicinu stranu).

Všechny Aliciny oblouky jsou kratší než $2\pi/n$. S Bobovými vrcholy sousedí aspoň $k+1$ stran a Alice má jen k bodů mimo vrcholy, nemůže je tedy všechny zabrat. Posledním tahem proto Bob umí vytvořit oblouk délky jen o libovolně málo menší než $2\pi/n$, čímž vyhraje.