2. soutěžní série

21. 10. 2024

Úloha 1. Nechť (a_n), (b_n) jsou posloupnosti kladných čísel, přičemž (b_n) je neomezená a platí $a_n > nb_n$ pro všechna n. Dokažte, že pak i posloupnost $c_n = a_{n+1} - a_n$ je neomezená. (5 bodů)

Úloha 2. Najděte všechny dvojice (m, n) přirozených čísel takové, že každý z polynomů $x^2 - mx + n$ a $x^2 - nx + m$ má dva celočíselné kořeny. (10 bodů)

Úloha 3. Ukažte, že jediný polynom P s celočíselnými koeficienty, který splňuje $n \mid P(2^n)$ pro každé přirozené n, je nulový polynom. (10 bodů)

Úloha 4. Buď $n > 1$ přirozené číslo. Alice a Bob střídavě obarvují dosud neobarvené body jednotkové kružnice, v každém tahu právě jeden. Alice začíná a obarvuje své body červeně, Bob obarvuje své body modře. Hra končí, jakmile každý z hráčů obarví právě n bodů. Skóre hráče je délka nejdelšího oblouku, jehož krajní body jsou obarveny barvou hráče a žádný z jeho vnitřních bodů není obarven (ani barvou toho hráče). Pokud takový oblouk neexistuje, je hráčovo skóre 0. Vyhrává hráč s vyšším skóre, v případě rovnosti je remíza. Má některý z hráčů vyhrávající strategii? (15 bodů)

2nd contest series

October 21, 2024

Problem 1. Let (a_n), (b_n) be two sequences of positive numbers, (b_n) is unbounded and $a_n > nb_n$ for all n. Prove that the sequence $c_n = a_{n+1} - a_n$ is unbounded. (5 points)

Problem 2. Find all couples (m, n) of integers such that each of polynomials $x^2 - mx + n$ and $x^2 - nx + m$ has two roots in integers. (10 points)

Problem 3. Show that the only polynomial P with integer coefficients that satisfies $n \mid P(2^n)$ for every positive integer n is zero polynomial. (10 points)

Problem 4. Let $n > 1$ be an integer. Alice and Bob take turns marking unmarked points on the unit circle (one point in each turn). Alice starts and marks her points red, while Bob marks his blue. They stop once each player has marked exactly n points. Each player's *score* is defined as the length of the longest arc of the circle which has both endpoints of that player's color and which doesn't contain any marked points (even of the player's color) in its interior, or 0 if such an arc doesn't exist.

If the scores are equal it's a tie, and otherwise the player with the higher score wins. Does one of the players have a winning strategy? (15 points)