# 3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 18.11.2024

**Úloha 1.** Jsou dány matice $A$, $B$ velikosti $n \times n$ splňující $A^{2024} = 0$ a $A + B = AB$. Dokažte, že $B$ je singulární.

**Úloha 2.** Uvažujme spojitou funkci $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ splňující

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = 0 = \int_0^\pi f(x) \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Pak $f$ má aspoň dva nulové body. Dokažte.

**Úloha 3.** Množinu bodů v rovině nazveme *rozumnou*, jestliže žádné tři body množiny nejsou kolineární a úhly, které určují, jsou ve stupních vyjádřeny racionálním číslem.

a) Existuje nekonečná rozumná množina?
b) Existuje nespočetná rozumná množina?

**Úloha 4.** Uvažujme sedačkovou lanovku s $n$ sedačkami na lanové smyčce. Nechť $m$ je přirozené číslo nepřevyšující $n$. Při nasedání ve spodní stanici je $m$ sousedních sedaček odpojeno ze smyčky a po nasednutí pasažérů připojeno zpět v opačném pořadí do stejného místa lanové smyčky. Pak je odpojeno následujících $m$ sedaček a tak stále dál. Po jakém počtu nasedání se sedačky poprvé vrátí do stejného cyklického pořadí jako byly na začátku? Řešte pro obecná $m$, $n$ a speciálně pro lanovku v Breckenridge ski area ($n = 107$, $m = 2$).

**Úloha 5.** Buď $x_1, x_2, x_3, \ldots$ posloupnost přirozených čísel splňující $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$ pro každou dvojici $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Dokažte, že $x_i \geq 2024$ pro nějaké přirozené $i$.

**Úloha 6.** Množina rovnostranných trojúhelníků v rovině se nazývá *nasycená*, jestliže průnik každých dvou trojúhelníků je buď prázdný nebo je tvořen jejich společným vrcholem a zároveň každý vrchol je společný právě dvěma trojúhelníkům. Určete nejmenší kladné $n$, pro něž existuje nasycená množina $n$ trojúhelníků s celočíselnými délkami stran.

# 3rd home series

Solutions will be presented at the seminar on November 18, 2024.

**Problem 1.** Given two $n \times n$ matrices $A$, $B$ satisfying $A^{2024} = 0$ and $A + B = AB$. Prove that $B$ is singular.

**Problem 2.** Consider a continuous function $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ satisfying

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, \mathrm{d}x = 0 = \int_0^\pi f(x) \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Then $f$ has at least two zero points. Prove.

**Problem 3.** A set of points in the plane is called *sane* if no three points are collinear and the angles between them in degrees are rational numbers.

a) Does there exist an infinite sane set?
b) Does there exist an uncountable sane set?

**Problem 4.** Consider a ski lift with $n$ chairs on a cable loop. Let $m$ be an integer not larger than $n$. At each loading stage at the bottom, the lowest $m$ descending chairs are detached from the cable, loaded with skiers, and then reattached in the reverse order to the same location on the cable. Then the next $m$ descending chairs are detached and so on. After how many loading stages are the chairs returned for the first time to the same cyclic order they had at the beginning? Solve for general $m$, $n$ and especially for the lift at the Breckenridge ski area ($n = 107$, $m = 2$).

**Problem 5.** Let $x_1, x_2, x_3, \dots$ be a sequence of positive integers such that $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$ for every couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Prove that $x_i \geq 2024$ for some positive integer $i$.

**Problem 6.** A set of equilateral triangles in the plane is called saturated if the intersection of any two is either empty or is a common vertex and every vertex is shared by exactly two triangles. What is the smallest positive integer $n$ such that there exists a saturated set of $n$ triangles with integer length sides?

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`