3. soutěžní série – řešení

1. Pravou stranu rovnice $p^2 = a^3+b^3$ rozložíme na $(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Protože $a+b > 1$, zbývají 2 možnosti: 1. $a^2 - ab + b^2 = 1$, což vede ke sporu, je totiž $a^2 - ab + b^2 \geq ab \geq 1$ a druhá rovnost nastává jen při $a = b = 1$, pak ale $p^2 = 2$, což nelze. 2. $a+b = a^2-ab+b^2 = p$, z čehož plyne $p = (a+b)^2 - 3ab = p^2 - 3ab$, tj. $p \mid 3ab$ a protože $a, b < p$, tak nutně $p \mid 3$, tj. $p = 3$, čemuž vyhovuje $a = 1$, $b = 2$.

2. Uvažujme kolmé průměty úseček na strany čtverce. Pokud součet délek průmětů na některou ze stran bude aspoň 1012, máme vyhráno, protože některé dva průměty se budou překrývat aspoň krajními body. Stačí dokázat, že součet délek průmětů na dvě navzájem kolmé strany čtverce dohromady bude aspoň 2024. Ale dva průměty jedné úsečky tvoří spolu s úsečkou pravoúhlý trojúhelník, jehož dvě odvěsny jsou dohromady delší než přepona, která má délku 1. Tím je důkaz hotov.

3. Hledáme společný pevný bod f a g. Víme, že f (stejně tak g) má pevný bod, protože $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$ a ze spojitosti někde mezi platí $f(x) = x$. Dále f zobrazuje pevné body g zase na pevné body g (a naopak): je-li x pevný bod g, pak $g(f(x)) = f(g(x)) = f(x)$.

Když je f klesající, tak má jen jeden pevný bod. Funkce g ho ale zobrazí zase na pevný bod, takže ho musí zachovat a vyhráli jsme.

Když je f rostoucí, pak označíme x_0 nějaký pevný bod g a iterujeme $x_{i+1} = f(x_i)$, což je posloupnost pevných bodů g. f roste, čili pokud $x_1 \geq x_0$, tak $x_2 \geq x_1$ atd, a naopak pokud $x_1 \leq x_0$, tak $x_2 \leq x_1$ atd. Kažopádně je posloupnost $\{x_i\}$ monotónní, takže má v uzavřeném intervalu limitu c. Pak limita rovností $x_i = g(x_i)$ a $x_{i+1} = f(x_i)$, když $i \to \infty$, dává ze spojitosti $c = g(c)$ a $c = f(c)$.

4. Označme prvky grupy $A_1, \ldots, A_m$ a jejich součet A. Pak $A_iA = A$ pro každé i, protože násobení A_i je bijekce na G. Sečtením přes $i = 1, \ldots, m$ dostáváme $A^2 = mA$. Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní číslo A, pak (aplikováním $A^2 = mA$ na vlastní vektor) $\lambda^2 = m\lambda$, tj. $\lambda = 0$ nebo m. Zároveň stopa A, což je součet vlastních čísel, je nulová, tj. λ nemůže být m. Pak je ale $A - mI$ invertovatelná a protože $A^2 - mA = 0$, je také $0 = (A^2 - mA)(A - mI)^{-1} = A$, což jsme chtěli dokázat.