3. soutěžní série

11. 11. 2024

Úloha 1. Najděte všechna prvočísla, jejichž druhá mocnina je součtem třetích mocnin dvou přirozených čísel. (5 bodů)

Úloha 2. Uvnitř čtverce o straně 1012 leží 2024 úseček délky jedna. Ukažte, že existuje přímka rovnoběžná s některou stranou čtverce, která protíná alespoň dvě ze zadaných úseček. (10 bodů)

Úloha 3. Mějme spojité funkce $f, g : [a, b] \to [a, b]$ splňující $f(g(x)) = g(f(x))$ pro všechna x v $[a, b]$, přičemž f je monotónní. Dokažte, že existuje $c \in [a, b]$, ve kterém platí $f(c) = g(c) = c$. (10 bodů)

Úloha 4. Uvažujme konečnou grupu G tvořenou reálnými maticemi $n \times n$ s operací maticového násobení. Nechť je součet stop prvků G nulový. Ukažte, že součet prvků G je nulová matice.

3rd contest series

November 11, 2024

Problem 1. Find all prime numbers such that the square of the prime number can be written as the sum of cubes of two positive integers.
(5 points)

Problem 2. There are 2024 line segments of lengths 1 inside a square with side length 1012. Show that there exists a line parallel to one of the square's sides and intersecting at least two of the line segments.
(10 points)

Problem 3. Consider continuous functions $f, g : [a, b] \to [a, b]$ satisfying $f(g(x)) = g(f(x))$ for all x in $[a, b]$, f being monotone. Prove that there exists $c \in [a, b]$ for which $f(c) = g(c) = c$ holds. (10 points)

Problem 4. Consider a finite group G of real $n \times n$ matrices, the group operation being matrix multiplication. Assume the sum of traces of elements of G is zero. Show that the sum of elements of G is the zero matrix.