4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 2.12.2024

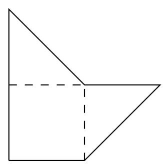
Úloha 1. Tony napsal posloupnost $(a_k)_{k\geq 1}$ kladných celých čísel, v níž se každé kladné celé číslo vyskytuje právě jednou. Brainy řekne Joeovi kladné celé číslo, Joe ho napíše. Poté Joe opakuje následující: je-li poslední napsané číslo k, napíše číslo a_k. Skončí ve chvíli, kdy napíše číslo, které už jednou napsal. Může Tony zvolit takovou posloupnost, aby Joe nikdy neskončil, a to nezávisle na tom, které číslo zvolí Brainy?

Úloha 2. Buď R okruh a P jeho prvoideál. Dokažte, že R/P^2 nemá žádné idempotentní prvky kromě 0 a 1. (Prvek e je idempotentní, jestliže $e \cdot e = e$.) [Případně řešte ve speciálním případě: je-li p prvočíslo a $a^2 \equiv a \pmod{p^2}$, pak $a \equiv 0$ nebo $a \equiv 1 \pmod{p^2}$.]

Úloha 3. Buď $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ a definujme $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $h(x) = xf(x)$. Ukažte, že g je konvexní na $(0,\infty)$, právě když h je konvexní na $(0,\infty)$.

Úloha 4. Pro každé dokonalé číslo n platí $\sum \frac{1}{p+1} < \ln 2 < \sum \frac{1}{p-1}$, sčítáme-li přes všechny prvočíselné dělitele p čísla n. Dokažte. Přirozené číslo n je dokonalé, pokud součet jeho dělitelů je roven $2n$.

Úloha 5. *Mřížový obdélník* je obdélník, jehož strany leží na přímkách dané čtvercové mřížky. Lze z dílků následujícího tvaru sestavit mřížový obdélník? Dílky smíme otáčet i překlápět, ale nesmějí se překrývat a vyznačený čtverec musí vždy pokrývat čtverec mřížky.



Úloha 6. Bonusová úloha Nechť $a, b, c \in [0,1]$. Dokažte

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \geq \frac{7}{8}.$$

4th home series

Solutions will be presented at the seminar on December 2, 2024.

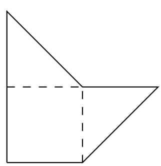
Problem 1. Tony has written a sequence $(a_k)_{k\geq 1}$ of positive itnegers containing each positive integer exactly once. Brainy then gives Joe a positive integer n, Joe writes it down. Then Joe repeats the following: if the last written number is k, he writes down a_k. He stops when he writes down a number he has written before. Can Tony choose a sequence so that no matter what n Brainy chooses, Joe keeps writing down numbers forever?

Problem 2. Let R be a ring and P its prime ideal. Prove that R/P^2 has no idempotent elements excluding 0 and 1. (Element e is idempotent, if $e \cdot e = e$.) [You can solve a special case: if p is a prime and $a^2 \equiv a \pmod{p^2}$, then $a \equiv 0$ or $a \equiv 1 \pmod{p^2}$.]

Problem 3. Let $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ and let $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, $h(x) = xf(x)$. Show that g is convex in $(0, \infty)$, if and only if h is convex in $(0, \infty)$.

Problem 4. Each perfect number n satisfies $\sum \frac{1}{p+1} < \ln 2 < \sum \frac{1}{p-1}$, where the sums are taken over all prime divisors p of n. Prove. A positive integer n is *perfect* if the sum of its positive divisors is $2n$.

Problem 5. *Grid rectangle* is a rectangle whose sides lie on lines of a given square grid. Is it possible to assemble a grid rectangle from pieces of the following shape? The pieces can be rotated and flipped, but they must not overlap and the marked square must always cover a square of the grid.



Problem 6. Bonus problem Let $a, b, c \in [0, 1]$. Prove

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \geq \frac{7}{8}.$$

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`