4. soutěžní série – řešení

1. Dosadíme-li $x = 1$, dostaneme z $f(1) = 2$ rovnost $f(2) = 1$. Ze spojitosti plyne, že celý interval $[1, 2]$ leží v oboru hodnot. Pro každé $y \in [1, 2]$ tedy existuje x, že $f(x) = y$. Pak $y = f(x) = \frac{2}{f(f(x))} = \frac{2}{f(y)}$, tj. $f(y) = \frac{2}{y}$. Funkce $f(x) = \frac{2}{x}$ vyhovuje, je tedy jediným řešením.

2. Pokud A je regulární, pak

$$\det(I + AB) = \det(A(I + BA)A^{-1}) = \det A \det(I + BA) \det(A^{-1}) = \det(I + BA).$$

Pokud A není regulární, uvažujme matici $A_t = A - tI$, $t \in \mathbb{R}$. Matice A_t je regulární pro všechna t až na konečně mnoho hodnot (kromě vlastních čísel matice A). Tedy funkce $P(t) := \det(I + A_t B) - \det(I + BA_t)$ je nulová pro všechna reálná t až na konečně mnoho. Zároveň z definice determinantu plyne, že P je polynom stupně nejvýš n, tj. je nutně roven nule všude, tj. i pro $t = 0$.

3. Celá čísla jsou všechna propojená, protože n sousedí s $n + 1$, takže stačí ukázat, že je každé racionální číslo propojené s celým číslem. To uděláme tak, že dokážeme, že každé necelé číslo sousedí s číslem, které má menší jmenovatel (to sousedí zase s číslem s menším jmenovatelem atd. až ke jmenovateli 1). Jelikož jsou a, b nesoudělná, existují Bézoutovy koeficienty $k, l \in \mathbb{Z}$ takové, že $ka - lb = 1$, což ale přesně znamená $\frac{a}{b} - \frac{l}{k} = \frac{1}{kb}$. Stačí tedy zařídit, aby bylo $0 < k < b$. To jde, jelikož když máme koeficienty k, l, vyhovují i koeficienty $k + nb, l - na$, takže můžeme k posunout o násobek b do intervalu $[0, b - 1]$. A snadno nahlédneme, že pokud $b > 1$, nemůže být $k = 0$, čili skutečně můžeme předpokládat $0 < k < b$.

4. Posunem dílku se díra posune o dvě pole, takže se může obecně dostat jen na některá pole (je-li tabulka $(2m - 1) \times (2n - 1)$, může být na $m \times n$ polích). Říkejme jim modrá; rohy jsou modré. Na každém modrém poli kromě volného rohu leží domino, které míří na některé vedlejší modré pole (svou krátkou stranou s ním sousedí). Z tohoto vedlejšího pole nakreslíme šipku na toto pole, která značí, že kdyby byla na vedlejším poli díra, může se pohybem dílku dostat na toto pole. Takto můžeme díru přesouvat po šipkách. Z kontrukce vede na každé modré pole právě jedna šipka, až na volný roh. Z toho už plyne, že když na modré pole nemůžeme dostat díru, musí existovat nějaký cyklus šipek (jdeme proti směru šipek, buď dojdeme do volného rohu, pak tam ale díru lze přesunout, nebo se zacyklíme).

Dokážeme sporem, že se cyklus nevytvoří. Dokážeme indukcí, že každý cyklus by nutně ohraničoval oblast tvořenou lichým počtem políček, taková oblast ale nemůže být pokryta dominy. BÚNO jde cyklus po směru hodin. Nejmenší možný cyklus obsahuje jedno políčko. Když cyklus dvakrát za sebou zatočí doprava, můžeme tyto dva vrcholy vynechat a spojit ten před nimi a ten za nimi. Tím odebereme dvě pole. Když zatáčí doprava, ale předtím ani potom doprava nezatáčí, vyměníme směry šipek okolo zatáčky (např. nahoru, doprava → doprava, nahoru) Tím buď odebereme čtyři pole, nebo projedeme vrcholem, kterým už cyklus prochází, čímž odebereme tři a cyklus se rozpadne na dva z indkuce liché cykly.