4. soutěžní série

25. 11. 2024

Úloha 1. Najděte všechny spojité funkce $f : [1,2] \to [1,2]$ splňující $f(1) = 2$ a

$$f(x) = \frac{2}{f(f(x))}$$

pro všechna $x \in [1,2]$. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť jsou A, B matice $n \times n$ a I jednotková matice $n \times n$. Dokažte, že $\det(I + AB) = \det(I + BA)$. (10 bodů)

Úloha 3. Řekneme. že dvě racionální čísla $p = \frac{a}{b}$ a $q = \frac{c}{d}$ (v základním tvaru) *sousedí*, pokud $|p - q| = \frac{1}{bd}$. Řekneme, že jsou p a q *propojená*, pokud existuje posloupnost racionálních čísel $p = q_0$, q_1, q_2, …, $q_n = q$, v níž každá dvojice q_i, q_{i+1} sousedí. Dokažte, že jsou každé dvě racionální čísla propojená.

(10 bodů)

Úloha 4. Obdélníková tabulka s lichými délkami stran je vyplněná dominy 2×1 až na jeden rohový čtvereček 1×1, kde zeje díra. Pokud sousedí domino krátkou stranou s dírou, můžeme ho posunout podél dlouhé strany o 1, aby díru pokrylo (díra se objeví jinde). Dokažte, že takovými posuny můžeme přesunout díru do kteréhokoliv jiného rohu tabulky. (15 bodů)

4th contest series

November 25, 2024

Problem 1. Find all continuous functions $f : [1,2] \to [1,2]$ satisfying $f(1) = 2$ and

$$f(x) = \frac{2}{f(f(x))}$$

for all $x \in [1,2]$. (5 points)

Problem 2. Let A, B be $n \times n$ matrices and let I be the $n \times n$ identity matrix. Prove $\det(I + AB) = \det(I + BA)$. (10 points)

Problem 3. Let us say that two rational numbers $p = \frac{a}{b}$ and $q = \frac{c}{d}$ (written in reduced terms) are *linked* if $|p - q| = \frac{1}{bd}$. We say that p and q are *connected* if there is a sequence of rational numbers $p = q_0$, q_1, q_2, …, $q_n = q$, with each pair q_i, q_{i+1} linked. Show that any pair of rational numbers is connected. (10 points)

Problem 4. A rectangular table with odd side lengths is filled with 2×1 dominoes except one of the 1×1 corner squares where is a hole. If a domino is adjacent to a hole on its short side, we can move it along its long side by 1 to cover the hole (the hole will appear elsewhere). Prove that by such moves we can move the hole to any other corner of the table. (15 points)