5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 16.12.2024

Úloha 1. Buď A reálná matice $n \times n$ s prvky $A_{i,j}$. Nechť pro každé i od 1 do n platí

$$2A_{i,i}^2 > \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2.$$

Musí být A regulární?

Úloha 2. Nalezněte všechna přirozená čísla n taková, že $n+2^n \mid n+8^n$.

Úloha 3. Je možné zaparkovat kolo těsně u obrubníku? Kolo je úsečka délky 2, její střed se pohybuje po grafu diferencovatelné funkce f a úsečka je vždy tečná ke grafu funkce. Najděte takovou $f : [0,1] \to [0,+\infty)$, aby $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ pro $x > 0$ a aby celá úsečka ležela v (uzavřené) horní polorovině pro všechna $x \in [0,1]$, nebo dokažte, že taková f neexistuje.

Úloha 4. Dokažte, že počet způsobů, jak vydláždit obdélník $2 \times 2n$ tetrominy, je druhá mocnina celého čísla.

Úloha 5. Najděte všechny čtyřúhelníky A s následující vlastností. Na grafu každé spojité funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existují čtyři body, které leží v jedné rovině a v půdoryse tvoří čtyřúhelník shodný s A. Graf funkce f je množina $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Půdorys je kolmý průmět do roviny xy.

Úloha 6. Julius Caesar nařídil dvěma sluhům, aby ho pobavili hrou na Boj. Nejprve rozdělil balíček 2024 karet očíslovaných $1, 2, \ldots, 2024$ na dvě hromádky a každému sluhovi dal jednu. V každém kole oba sluhové odkryjí vrchní kartu své hromádky a ten s vyšší kartou vezme obě karty a umístí je dospodu své hromádky v pořadí, jaké si zvolí. Hra končí, jakmile jeden ze sluhů nemá na hromádce žádné karty.

Caesar sluhy nepustí, dokud nedohrají. Dokážou sluhové spolupracovat, aby nehráli věčně?

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

5th home series

Solutions will be presented at the seminar on December 16, 2024.

Problem 1. Let A be a real $n \times n$ matrix with elements $A_{i,j}$. Let

$$2A_{i,i}^2 > \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2$$

for each $i = 1, \ldots, n$. Is A necessarily regular?

Problem 2. Find all positive integers n such that $n + 2^n \mid n + 8^n$.

Problem 3. Is it possible to park the front wheel of a bicycle right next to the curb? The front wheel is a line segment of length 2, its center moves along the graph of a differentiable function f, and the line segment is always tangent to the graph of the function. Find $f : [0, 1] \to [0, +\infty)$ such that $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ for $x > 0$, and the entire line segment lies in the (closed) upper half-plane for all $x \in [0, 1]$, or prove that such an f does not exist.

Problem 4. Prove that the number of ways to tile a $2 \times 2n$ rectangle with tetrominos is a perfect square.

Problem 5. Find all quadrilaterals A with the following property. On the graph of every continuous function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ there are four points that lie in the same plane and form a quadrilateral in plan view identical to A. The graph of the function f is the set $\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. The plan view is the orthogonal projection onto the xy plane.

Problem 6. Julius Caesar has ordered two of his servants to entertain him in a game of War. He first divides a pack of 2024 cards numbered $1, 2, \ldots, 2024$ arbitrarily between the two servants.

Each round, both servants reveal the top card of their pile, and the one with the higher card takes both cards and places them at the bottom of their pile, in an order they choose. The game ends once one of the servants has no cards left in his pile.

Julius won't let the servants go until they finish the game. Can the servants work together to avoid playing forever?

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`