5. soutěžní série – řešení

1. Z šesti po sobě jdoucích čísel jsou právě 3 dělitelná dvěma. Ze zbývajících tří čísel k, $k+2$, $k+4$ je jedno dělitelné třemi a nejvýše jedno pěti. Aspoň jedno z čísel je tedy dělitelné prvočíslem větším než 5 nebo je rovné 1. V prvním případě ono prvočíslo větší než pět určitě nedělí žádné další číslo z naší šestice, takže jsme hotovi. V případě, že šestice obsahuje jedničku, pak je to 1, 2, 3, 4, 5, 6 a prvočíslo 5 má požadovanou vlastnost.

2. Nechť $1 \le i, j \le n$, $i \neq j$ a uvažujme matici X, která má jedničku na pozici (i, j) a nuly jinde. Pak $\operatorname{tr} X = 0$ a $\operatorname{tr}(AX) = a_{ji}x_{ij} = a_{ji}$. Tedy nutně $a_{ji} = 0$ a A je tudíž diagonální. Dále pro X, která má $x_{ii} = 1$, $x_{jj} = -1$ a jinde nuly máme $\operatorname{tr}(AX) = a_{ii} - a_{jj}$, tj. prvky na diagonále A musí být stejné.

3. Sporem. Pokud x_n nekonverguje, pak má aspoň dva hromadné body $A_1 < A_2$ (např. $\liminf x_n$ a $\limsup x_n$) a posloupnost x_n "běhá mezi nimi". Jistě $f(x) \equiv x$ na (A_1, A_2) vede ke sporu, tedy existuje $A \in (A_1, A_2)$, že $f(A) \neq A$. BÚNO $f(A) > A$. Ze spojitosti $f(x) > x$ na nějakém okolí $O = (A - \delta, A + \delta)$, které neobsahuje A_1. Pro indexy větší než nějaké n_0 platí $|x_{n+1} - x_n| < 2\delta$, tedy posloupnost nepřeskočí interval O. Zároveň pokud $x_n \in O$, pak $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$, tj. posloupnost neprojde přes O směrem doleva, což je spor s tím, že A_1 je hromadný bod.

4. Rozdíl dvou čísel ve sloupci modulo $n-1$ se nemění žádnou operací. Takže když je nenulový, nelze dostat nuly. Tedy $n > 2$ nefunguje. Případ $n = 1$ evidentně taky nefunguje. Ukážeme, že $n = 2$ funguje:

Všechny řádky vynásobíme dvěma, aby byla čísla sudá (a sudá už zůstanou). Stačí umět vynulovat jeden sloupec. Když potom nulujeme další, tak násobení řádků vynulovaný sloupec neporuší (a zároveň při nulování jednoho sloupce nezískáme nulu v jiném sloupci, protože v něm jen násobíme a neodčítáme). Ukážeme, že umíme vždycky snížit maximum sloupce, aniž vytvoříme nulu. Až budou všechna čísla ve sloupci dvojky, odečteme 2 a je to. Dokud je maximum větší než dva, vynásobíme všechny dvojky (řádky, které v tom sloupci mají dvojku) na čtyřky a pak odečteme od sloupce 2. Tím se maximum sníží a nevznikne nula, protože dvojky zůstanou dvojkami.