

# 5. soutěžní série

9. 12. 2024

**Úloha 1.** Dokažte, že pro každých šest po sobě jdoucích přirozených čísel existuje prvočíslo, které dělí právě jedno z těchto čísel.

(5 bodů)

**Úloha 2.** Nechť  $A$  je komplexní  $n \times n$  matice taková, že  $\operatorname{tr}(AX) = 0$  pro každou  $n \times n$  matici  $X$  splňující  $\operatorname{tr} X = 0$ . Dokažte, že  $A$  je násobkem jednotkové matice.

(10 bodů)

**Úloha 3.** Buď  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  spojitá a  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  posloupnost splňující  $x_{n+1} = f(x_n)$  pro všechna  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažte, že  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  plyne konvergence  $x_n$ .

(10 bodů)

**Úloha 4.** Obdélníková tabulka je vyplněná kladnými celými čísly a  $n$  je pevné kladné celé číslo. V jednom tahu můžeme buď odečíst  $n$  od každého čísla některého sloupce nebo vynásobit číslem  $n$  každé číslo některého řádku. Najděte všechna  $n$ , pro něž je možné skončit s tabulkou samých nul nezávisle na velikosti a počátečním vyplnění tabulky.

(15 bodů)

# 5th contest series

December 9, 2024

**Problem 1.** Prove that for each six-tuple of consecutive positive integers there exists a prime dividing exactly one of these integers.

(5 points)

**Problem 2.** Let  $A$  be a complex  $n \times n$  matrix such that  $\operatorname{tr}(AX) = 0$  for each  $n \times n$  matrix  $X$  with  $\operatorname{tr} X = 0$ . Prove that  $A$  is a multiple of the identity matrix.

(10 points)

**Problem 3.** Let  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  be continuous and let  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  be a sequence satisfying  $x_{n+1} = f(x_n)$  for all  $n \in \mathbb{N}$ . Prove that  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$  implies convergence of  $x_n$ .

(10 points)

**Problem 4.** A rectangular table has every entry a positive integer and  $n$  is a fixed positive integer. A move consists of either subtracting  $n$  from every element in a column or multiplying every element in a row by  $n$ . Find all  $n$  such that we can always end up with all zeros whatever the size or content of the starting table.

(15 points)