# 6. soutěžní série – řešení

**1.** Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ je rostoucí na $[1, +\infty)$, tj. $f : [1, +\infty) \to [2, +\infty)$ je spojitá a bijekce, má tedy spojitou inverzi $f^{-1}$. Označme $b_n = f(a_n)$. Pokud $b_n$ konvergují, pak $b = \lim b_n$ je v definičním oboru $f^{-1}$ (neboť ten je uzavřený), a tudíž i $a_n = f^{-1}(b_n)$ konvergují k $f^{-1}(b)$.

**2.** Mějme matice $A, B$ (velikosti $n \times n$) a označme koeficienty lineární kombinace $\alpha, \beta$. Chceme, aby $\det(\alpha A + \beta B) = 0$. Tento determinant je homogenní polynom stupně $n \geq 1$ v proměnných $\alpha, \beta$ (protože každý prvek matice $\alpha A + \beta B$ je lineární homogenní polynom). Podle základní věty algebry má v komplexních číslech kořen a to nám dá vhodné koeficienty. V reálných číslech (netriviální) kořen mít nemusí, například matice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ s determinantem $\alpha^2 + \beta^2$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Takže nad $\mathbb{R}$ to neplatí.

**3.** Najdeme maximální cestu (jdeme grafem, dokud můžeme postoupit do vrcholu, kde jsme ještě nebyli). Z posledního vrcholu cesty vedou (aspoň) dvě další hrany do předchozích vrcholů cesty. Cesta s těmito hranami vytvoří „dva spojené cykly“ (tedy dohromady tři cykly), podíváme se pouze na podgraf, který tvoří. Dva vrcholy v něm jsou spojené třemi disjunktními cestami o délkách $1, k, \ell$ a délky cyklů jsou $1 + k$, $1 + \ell$ a $k + \ell$. Všechno to ovšem nemůžou být násobky tří.

**4.** a) Pro $n = 3$ pišme

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{3}{a} + \frac{1}{a-1} - \frac{2}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{3}{a} + \frac{2}{a(a+1)(a-1)} = \frac{1}{\frac{a}{3}} + \frac{1}{\frac{a(a+1)(a-1)}{2}}.$$

Pro $a$ dělitelné třemi jsou jmenovatele posledních dvou zlomků celá čísla, je-li navíc $a$ dost velké, je $\frac{a}{3} < a - 1 < a + 1 < \frac{a(a+1)(a-1)}{2}$, tj. $A \cap B = \emptyset$.

b) Pro obecné $n = 2m + 1$ pišme

$$\begin{aligned} \frac{1}{np-m} + \cdots + \frac{1}{np+m} &= \sum_{i=1}^{m} \left( \frac{1}{np-i} + \frac{1}{np+i} - \frac{2}{np} \right) + \frac{2m+1}{np} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{2i^2}{np(n^2p^2 - i^2)} + \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{np(n^2p^2-i^2)}{2i^2}} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Volíme-li $p$ tak, aby bylo dělitelné $2i^2$ pro všechna $i \in \{1, \ldots, m\}$, máme požadovaný zápis. Z tvaru

$$\frac{1}{np-i} + \frac{1}{np+i} - \frac{2}{np} = \frac{2np}{n^2p^2 - i^2} - \frac{2}{np}$$

je totiž vidět, že tato čísla jsou po dvou různá, navíc pro velká $p$ je

$$\frac{2i^2}{np(n^2p^2 - i^2)} < \frac{1}{np+m} < \frac{1}{np-m} < \frac{1}{p},$$

tedy $A \cap B = \emptyset$.