6. soutěžní série

6. 1. 2025

Úloha 1. Buď $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel větších než jedna. Pokud posloupnost $a_n + \frac{1}{a_n}$ konverguje, pak konverguje i posloupnost a_n. Dokažte. (5 bodů)

Úloha 2. Ukažte, že pro každou dvojici (stejně velkých) čtvercových matic nad $\mathbb{C}$ existuje jejich netriviální lineární kombinace, která je rovna singulární matici. Je to pravda pro matice nad $\mathbb{R}$? (10 bodů)

Úloha 3. V (konečném) neprázdném grafu má každý vrchol stupeň alespoň tři. Ukažte, že graf obsahuje cyklus, jehož délka není násobek tří. (10 bodů)

Úloha 4. Přirozené číslo n je *pěkné*, pokud existuje nekonečně mnoho dvojic (A, B), kde A je množina sestávající z n po sobě jdoucích přirozených čísel, B je množina sestávající z méně než n přirozených čísel (ne nutně po sobě jdoucích), $A \cap B = \emptyset$ a $\sum_{k \in A} \frac{1}{k} = \sum_{k \in B} \frac{1}{k}$. Ukažte, že a) $n = 3$ je pěkné, b) každé liché $n \geq 3$ je pěkné. (15 bodů)

6th contest series

January 6, 2025

Problem 1. Let $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real numbers larger than 1. If the sequence $a_n + \frac{1}{a_n}$ converges, then a_n also converges. Prove.
(5 points)

Problem 2. Show that for each pair of square matrices (of equal sizes) over $\mathbb{C}$ there exists their non-trivial linear combination which is singular. Is the same true over $\mathbb{R}$? (10 points)

Problem 3. In a (finite) non-empty graph each vertex has a degree at least three. Show that the graph contains a cycle whose length is not a multiple of three. (10 points)

Problem 4. An integer n is *nice*, if there exist infinitely many pairs (A, B), where A is a set consisting of n consecutive positive integers, B is a set consisting of less than n positive integers (not neccessarily consecutive), $A \cap B = \emptyset$ and $\sum_{k \in A} \frac{1}{k} = \sum_{k \in B} \frac{1}{k}$. Show that a) $n = 3$ is nice, b) show that every odd $n \geq 3$ is nice. (15 points)

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`