

# POSLEDNÍ KILOMETRY JEDNÉ VELMI ZNÁMÉ VÝPRAVY

(příběh z cyklu Statistický pohled na měření v české a světové literatuře)

JAROSLAV MAREK

marek@inf.upol.cz  
KMAaAM PŘF UP OLOMOUC



## OBSAH

Príspevek je věnován statistické analýze přípojovacích měření. U konkrétní úlohy je vytvořen dvouetapový model s podmínkou na parametry obou etap a je proveden výpočet odhadu parametrů.

## Z HISTORIE

Večer dne 14. prosince je ve stanu nálada jako v předvečer slavnosti. Zítřa — zítřa budou u cíle — a nikde se neukázalo nic, co by jim mohlo věc pokazit. Ráno dne 15. prosince se začíná překrásnou pohodou. Sotva si dopřejí času k snídani, sáně snad ještě nikdy nebyly tak rychle naloženy, 25 stupňů mrazu, slunce pozakryto závojem mraků, sánová dráha místy skvělá, psi pádí jako šípky, poslední věže jsou postaveny jen v poloviční výšce a jen tak halabala, stejně brzy učiní své povinnosti zadost. V poledne propočítávají, kde jsou — ještě 13 kilometrů!

Nikdo téměř nemluví, rozčilením mají všichni hrdlo přiškrkveno. Řidiči sání nespouštějí oči s měřicího kolečka, zdali vypočtená vzdálenost dosud není ujeta. A měřiče kilometrů fungují tak přesně, že se o 3. hodině odpolední všechny troje sáně na též místě zastavují. Divoká štvance je rázem skončena. Cíle je dosaženo! Silný stisk ruky vůdci a všem kamarádům, krátké blahopřání — ven s vlajkou! A patero rukou, zle porízených mrazem, chápe se tyče, zdvihnou vlajčí prapor, první a jediný na zeměpisném jižním pólu, a Amundsen pronáší tato prostá slova: "Vztyčujeme tě, milá vlajko, na jižním pólu a dáváme plošně, na níž leží, jméno země Krále Haakona VII." Vlajka je zaražena do země a připevněna. Je po obědu.

Zářící oči, radost na všech tvářích, hrdý smích: Norsko je pánem jižního pólu, Amundsen se čtyřmi muži dobyli této pevnosti.

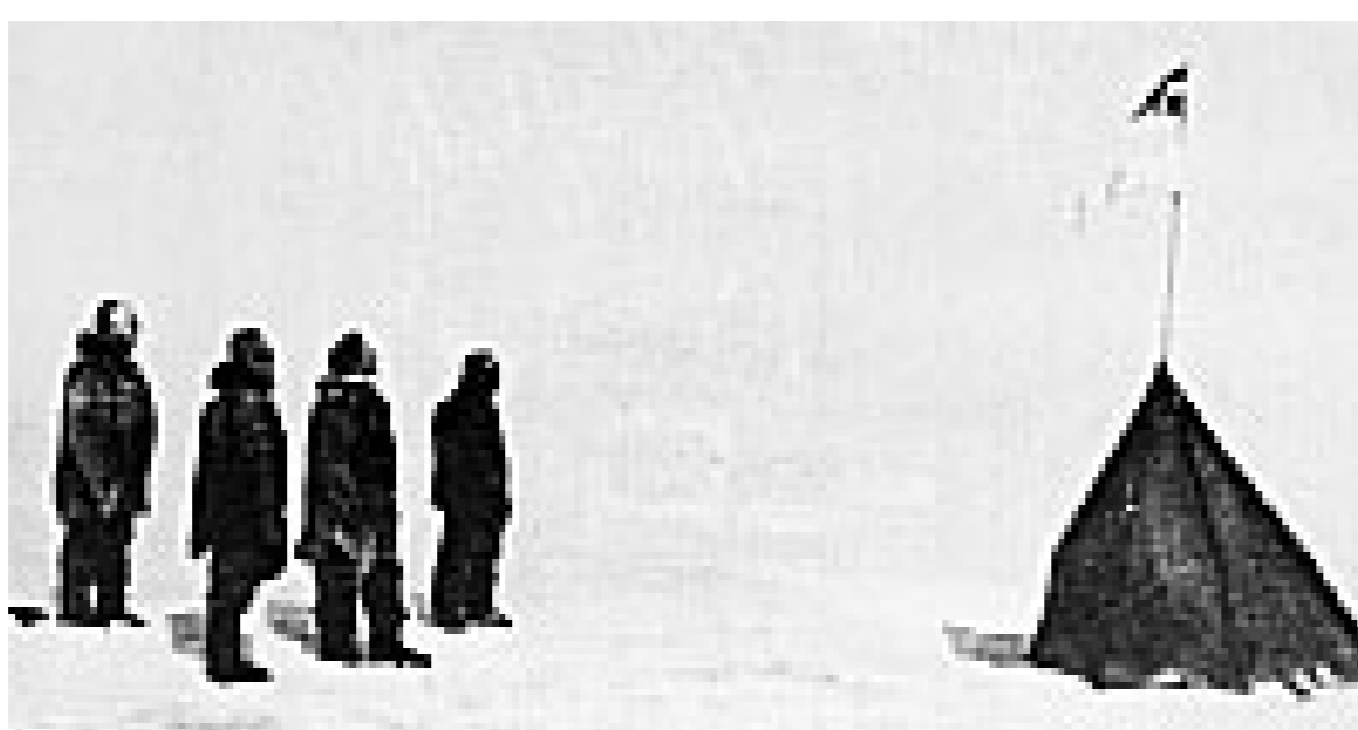
Slavný je večer těch pěti mužů ve stanu! Jako slavnostní pečeni kousek tuleního masa, a poněvadž zde, na této nejjihnější výspě světa, nelze ještě obdržeti stítky na hůl, vyryjí do sání a do všeho, co mají u sebe, nápis: "Jižní pól, 15. prosince 1911."

Ale jsou opravdu na pólu? Poněvadž se slunce skrylo, nemohli zjistit v poledne jeho výšku; ale výpočet z půlnoci udává  $89^{\circ}56'$ ; to by znamenalo ještě šest nebo sedm kilometrů k rozhodujícímu místu, i když přístroje, které má Amundsen s sebou, nečiní měření možné na centimetr. Ale nikdo nesmí v budoucnosti kritisovat a říci, že skutečného pólu nebylo dosaženo. Na zítřek zbývá tedy ještě úkol, pól "obkroužit"; tři muži, každý jiným směrem půjdou ještě asi 20 kilometrů dále, takže i malé omyly ve výpočtu budou vyrovnány.

Každý dobře ví, že touto výpravou dává v sázku svůj život — ještě nyní, v posledním okamžiku, kdy výprava vlastně již dosáhla svého cíle. Kdyby však přišli Angličané a svými dozajista jemnějšími přístroji prokázali, že skutečný pól ležel o několik mízných kilometrů jižněji, východněji nebo západněji, ti by se smáli pod vousy! To se nesmí stát!

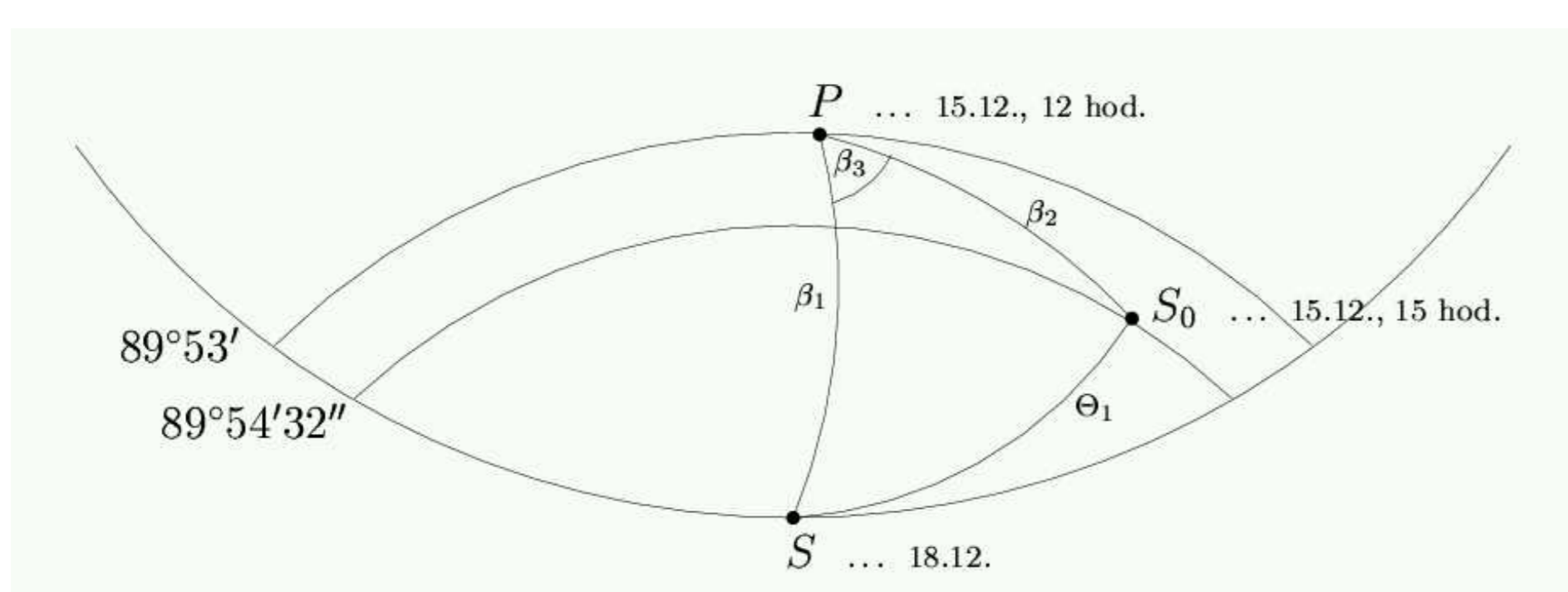
Nejméně osm hodin, nepříhodí-li se jim nehoda, které se nenadáli. Hodinu co hodinu měří Amundsen výšku slunce, jako by sám sebe chtěl ujistit, že slunce tu ještě je, a tato rozhodující, poněvadž souvislá řada jeho výpočtů praví, že opravdu je ještě kus cesty vzdálen od pólu: za posledního denního pochodu vybočily sáně trochu ze směru přesně jižního a stojí nyní na  $89^{\circ}54'32''$ .

Záhy odpoledne dne 15. prosince nastává opravdu poslední pochod desíti kilometrů. Mají potraviny ještě na osmnáct dní: svých šestnáct psů — jednoho zabili, druhý úplně zubožený, odplížil se kamsi stranou, aby v klidu zašel — rozdělil do dvou sání, rovněž tak zavazadla; třetí sáně postaví kolmo na sněh, ať zde zůstanou vedle několika prázdných beden. Pak našich pět mužů zamíří přesně jižním směrem, Amundsen jako poslední přísně dbá, aby stopa byla přímá jako napjatá šňůra. Tak pochodují husím pochodem 10 kilometrů, pak nejprve postaví stan a připraví se na příští den jež věnují přesnému, každou hodinu opakovanému měření. Jsou nyní tak blízko pólu, jak se mu podle svých přístrojů mohli přiblížit. Pro všechny případy postoupí Bjaaland a Hanssen ještě o 7 kilometrů, stále po přímé linii. Tím je věc dovršena a na oběd tohoto 18. prosince nezapomene ani jeden z nich, co živ bude. Bjaaland povstane, aby pronesl slavnostní řeč. Doutník na pólu! První posel onoho vzdáleného lepšího světa, do něhož budou ode dneška zase spěchat. Pak přinesou se sání malý stan, jež vezli s sebou. Postaví jej na pólu — pevně, aby jej bouře nepřekotila — nad ním se třepotá norská vlajka.



Ráno dne 26. ledna 1912 zastavují dvoje sáně se 12 psy (z původních 52) před táborem. Cesta trvala 99 dní, urazili celkem asi 3000 km.

(zkráceno) z knihy H. H. Houden, Útok na Jižní pól, KMa, Praha, 2001



## REGRESNÍ MODEL

Modelem přípojovacího měření budeme nazývat náhodný vektor  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}'_1, \mathbf{Y}'_2)'$ , jehož střední hodnota a kovarianční matice má následující strukturu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \sim \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{D} & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right],$$

kde  $\mathbf{X}_1, \mathbf{D}, \mathbf{X}_2$  jsou známé matice typu  $n_1 \times k_1, n_2 \times k_1, n_2 \times k_2$ , vyhovující podmínce  $\mathcal{M}(\mathbf{D}') \subset \mathcal{M}(\mathbf{X}'_1)$ ;  $\Theta, \beta$  jsou neznámé  $k_1$  a  $k_2$  dimenzionální vektory;  $\Sigma_{11}$  a  $\Sigma_{22}$  jsou známé kovarianční matice vektorů  $\mathbf{Y}_1$  a  $\mathbf{Y}_2$ .

V tomto modelu se parametr  $\Theta$  odhaduje na bázi vektoru  $\mathbf{Y}_1$  první etapy a parametr  $\beta$  na bázi vektoru  $\mathbf{Y}_2 - \mathbf{D}\Theta$  a  $\hat{\Theta}$ . V praxi mohou nastat případy, kdy výsledky měření ve druhé etapě (tzn.  $\mathbf{Y}_2$ ) už nelze použít pro změnu odhadu  $\hat{\Theta}$ .

Parametrický prostor modelu přípojovacího měření  $\mathbf{Y}$  z této definice může být  $R^{k+m}$  ( $k + m$ -dimenzionální Euklidovský prostor), ale může být také uvažován ve tvaru podmínky typu I:

$$\underline{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} \Theta \\ \beta \end{pmatrix} : \mathbf{C}\Theta + \mathbf{B}\beta + \mathbf{a} = \mathbf{0} \right\},$$

kde  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  jsou matice typu  $q \times k_2, q \times k_1$  a kde  $\mathbf{a}$  je vektor délky  $q$ , pro které platí  $r(\mathbf{B}) = q < k_2$ . Vektor  $\Theta$  je parametr I. etapy (přípojovací), vektor  $\beta$  je parametr II. etapy (přípojované).

## ÚLOHA

Budeme uvažovat model přípojovacího měření. Z náčrtku je vidět, že parametry jsou vázány podmínkou

$$\cos(\Theta_1) = \cos(\beta_2) \cos(\beta_1) + \sin(\beta_2) \sin(\beta_1) \cos(\beta_3).$$

Linearizací této nelineární podmínky přejdeme k popsanému modelu s podmínkou typu I.

Pro výpočet odhadu parametrů použijeme metodu nejmenších čtverců s podmínkou typu I na parametry obou etap. Měřené hodnoty jsou k dispozici v citovaném textu. Přesnost měření popsanou kovariančními maticemi ale musíme jen odhadovat.

## STANDARDNÍ ODHAD

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{D}\hat{\Theta}) - (\mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{B}' [\mathbf{B} (\mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{B}]^{-1} \times \{ \mathbf{a} + \mathbf{C}\hat{\Theta} + \mathbf{B} (\mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}'_2 \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{D}\hat{\Theta}) \},$$

## ZÁVĚR

Ze získaných výsledků při různých alternativách výpočtů je zřejmé, že není možné vysvětlit předčasnou oslavu dobytí jižního pólu jinak než velkou odchylkou od jižního směru během pochodu dne 15. prosince 1911. Při zvolených kovariančních maticích, kterými popíšeme možné chyby při určení souřadnic bodu  $P$  a  $S_0$  a chybu změřené délky pomocí měřicího kolečka na sáních, lze konstatovat, že odchylka od jižního směru nemohla být menší než cca  $45^{\circ}$ . Pokud nepřipustíme větší chyby při určení polohy z poledne 15. prosince, je nepochybné, že důvodem předčasné oslavy byl špatný směr pochodu. To je i v souladu s Amundsenovou krátkou poznámkou, že se mírně odchýlili od jižního směru.

## CÍL PŘÍSPĚVKU

Cílem výpočtů bylo pokusit se objasnit důvody předčasné oslavy dobytí jižního pólu.

Druhým cílem bylo populárně demonstrovat hledání odhadů v dvouetapovém regresním modelu s podmínkou na parametry obou etap.

**Poděkování.** Příspěvek vznikl za podpory výzkumného záměru MSM 6198959214.

## Literatura

- [1] Kubáček L., Marek J. (2005): *Partial optimum estimator in two stage regression model with constraints and a problem of equivalence*. Math. Slovaca **55**, 477–494.
- [2] Houden H. H. (2001). *Útok na Jižní pól*. KMa, Praha.