TESTY HYPOTÉZ O PARAMETROCH REŠKÁLOVANÉHO WIENEROVHO PROCESU S POSUNUTÍM

Andrea Kvitkovičová

akvitkovicova@centrum.cz

Matematicko–fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

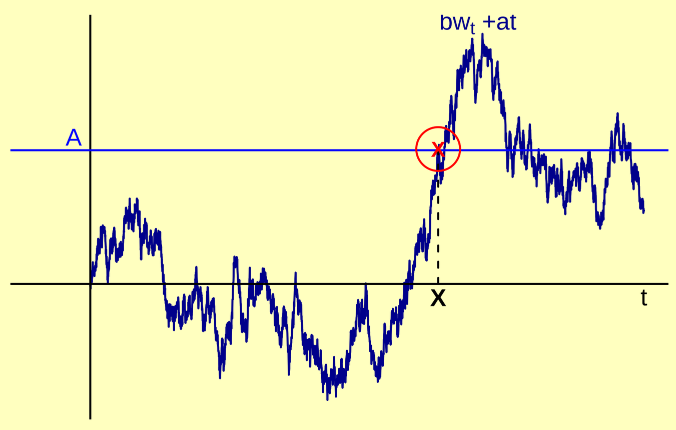
Zhrnutie: V príspevku sa zaoberáme testovaním hypotéz o parametroch a a b náhodného procesu $\{bw_t + at;\ t \geq 0\}$, kde $\{w_t;\ t \geq 0\}$ je Wienerov proces, $a \geq 0$ a $b > 0$. Testy sú založené na čase, kedy proces prvýkrát dosiahne vopred zvolenú kladnú hranicu. Dôraz kladieme na testy hypotéz o parametri posunutia a, predovšetkým o jeho nulovosti.

Skonštruujeme rovnomerne najsilnejšie testy hypotéz o parametri posunutia a za predpokladu, že rozptyl b^2 je známy, a rovnomerne najsilnejšie nestranné testy jedného parametra v prítomnosti parametra rušivého. Zostrojíme tiež testy obidvoch parametrov súčasne.

Problém

Pri práci s dejmi, ktoré môžme popísať náhodným procesom, je často výhodné namiesto celej trajektórie sledovať dej len čiastočne. Ako kvalitné výsledky sa dajú na základe neúplných informácií získať?

- uvažujme dej, ktorý popíšeme náhodným procesom $Y_t = bw_t + at$, kde
  - $\{w_t;\ t \geq 0\}$ je Wienerov proces
  - $a \geq 0$ je parameter polohy
  - $b > 0$ je parameter mierky
- nesledujeme celú trajektóriu
- pozorujeme len čas, kedy dej prvýkrát dosiahne hranicu $A \geq 0$
  $X = \inf\{t \geq 0; Y_t \geq A\}$
- majme n nezávislých realizácií deja ⇢ pozorovania $X_1, \ldots, X_n$
- testujme hypotézy o parametroch a a b



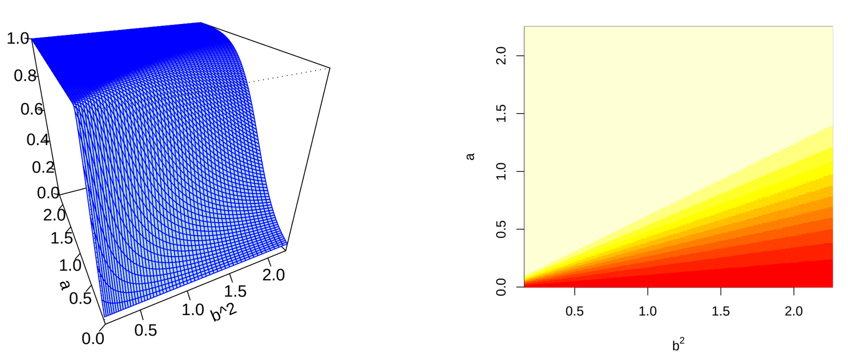
Zostrojíme testy
- rovnomerne najsilnejšie (proti vybraným alternatívam)
- založené na Rényiho divergenciách, predovšetkým test pomerom vierohodnosti

Jednorozmerný prípad

Testujeme $H : a = 0$ proti $K : a > 0$.

Testy pri známom parametri mierky

- rovnomerne najsilnejší test H proti K
  - testová funkcia: $\mathbb{I}\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j \leq \frac{n^2 A^2}{b^2\, u^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right\}$
  - silofunkcia: $\exp\left\{\frac{2anA}{b^2}\right\}\Phi\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{anA}{b^2 u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) + \Phi\left(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} + \frac{anA}{b^2 u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)$
- ten istý test dostaneme pri využití presného rozdelenia testovej štatistiky testov založených na Rényiho divergenciách

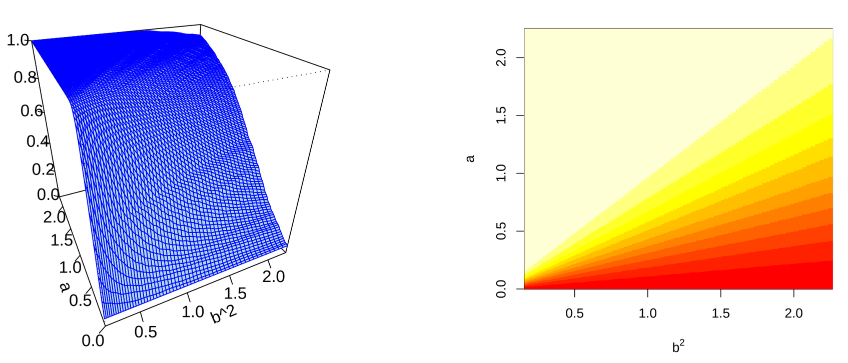


Sila testu ako funkcia a a b^2 pre $A = 1$, $n = 10$ a $\alpha = 0.05$. Sila rastie ako funkcia $\frac{nAa}{b^2}$. Pre dostatočne veľkú hodnotu výrazu dostaneme ľubovoľne veľkú silu.

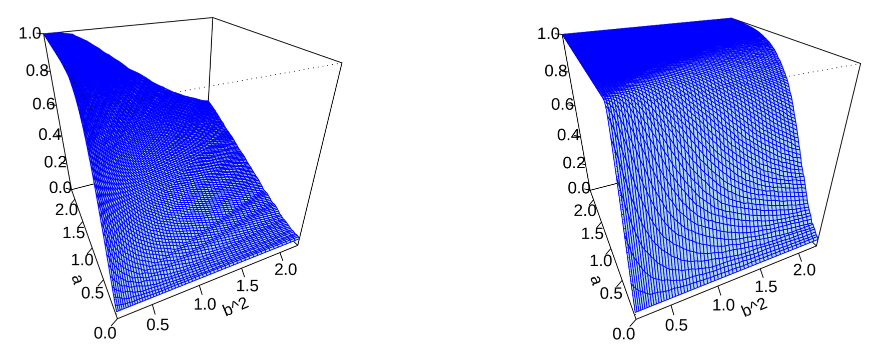
Testy pri neznámom parametri mierky

- rovnomerne najsilnejší nestranný test H proti K
  - testová funkcia: $\mathbb{I}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}\right) \leq n^2\left(\frac{n-1}{F_{1,n-1,1-\alpha}} + 1\right)\right\}$
  - silofunkcia:

$$\int_{F_{1,n-1,1-\alpha}}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{y^{\frac{n}{2}-1}\, v^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}(n-1)^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{\left(b^2vy - n\,(n-1)\,aA\right)^2}{2\,(n-1)\,b^4vy} - \frac{y}{2}\right\}\,dy\,dv$$



Sila testu ako funkcia a a b^2 pre $A = 1$, $n = 10$ a $\alpha = 0.05$.

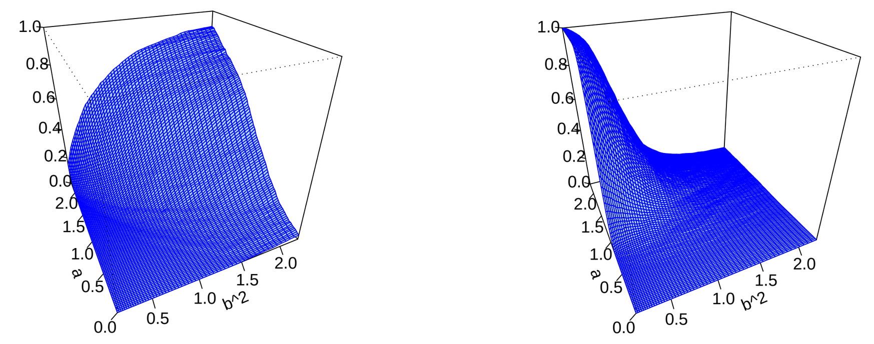


Sila testu ako funkcia a a b^2 pre $A = 1$ a $\alpha = 0.05$. Vľavo $n = 5$, vpravo $n = 15$. Obdobný celkový pokles (nárast) sa dá docieliť znížením (zvýšením) hranice A.

Dvojrozmerný prípad

Testujeme $H : a = a_0 \wedge b^2 = b_0^2$ proti $K : a \neq a_0 \vee b^2 \neq b_0^2$.

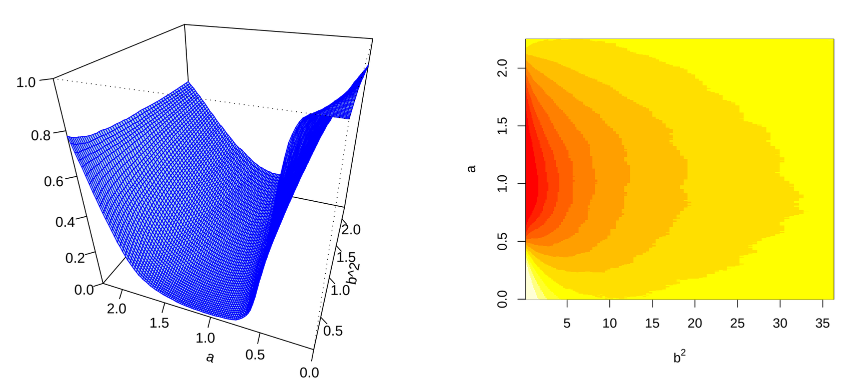
- najsilnejší test H proti $K' : a = a_1 \wedge b^2 = b_1^2$
  - testová funkcia: $\mathbb{I}\left\{A^2\left(\frac{1}{b_0^2} - \frac{1}{b_1^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + \left(\frac{a_0^2}{b_0^2} - \frac{a_1^2}{b_1^2}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \text{konšt.}\right\}$



Sila testu ako funkcia a a b^2 pre $A = 1$, $n = 10$ a $\alpha = 0.05$. Hypotéza: $a_0 = 1$, $b_0^2 = 1$. Alternatíva: vľavo $a_1 = 1.5$, $b_1^2 = 1.5$; vpravo $a_1 = 1.5$, $b_1^2 = 0.5$. Na okolí hypotézy je sila nízka; v smere alternatívy rastie. Celkový nárast (pokles) sily je možný pri zvýšení (znížení) rozsahu n alebo hranice A.

- test H proti K pomerom vierohodnosti
  - testová funkcia $\mathbb{I}\left\{-\frac{1}{2} - A\frac{a_0}{b_0^2} - \frac{1}{2}\log\frac{\widehat{b^2}}{b_0^2} + \frac{1}{2}\frac{\widehat{b^2}}{b_0^2} + \frac{A}{2}\frac{a_0^2}{b_0^2}\frac{1}{\hat{a}} + \frac{A}{2}\frac{1}{b_0^2}\hat{a} \geq \text{konšt.}\right\}$,

  kde $\hat{a} = \frac{A}{\bar{x}_n}$, $\widehat{b^2} = \frac{A^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{\bar{x}_n}\right)$ a $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$



Sila testu ako funkcia a a b^2 pre $A = 1$, $n = 10$ a $\alpha = 0.05$; $a_0 = 1$, $b_0^2 = 1$. Test je založený na presnom rozdelení testovej štatistiky. Je citlivejší na zmenu v parametri polohy a než na zmenu v parametri mierky b^2. Vyššia sila proti vybraným alternatívam sa dá dosiahnuť zvýšením rozsahu n alebo hranice A.

- analogické výsledky pre iné testy založené na Rényiho divergenciách využívajúce presné rozdelenie testovej štatistiky

Záver

Aj na základe čiastkovej informácie môžme zostrojiť testy s výhodnými vlastnosťami. Výber konkrétneho testu závisí na hypotéze a alternatívach, ktoré sú v centre pozornosti. Okrem hodnôt silofunkcie záleží tiež na obmedzeniach nákladov, času a voľby jednotlivých parametrov experimentu. Za istých predpokladov sa dajú vlastnosti testov konštruovaných pri týchto obmedzeniach optimalizovať.

Poďakovanie

Rada by som poďakovala doc. RNDr. Danielovi Hlubinkovi, Ph.D. za cenné návrhy, rady a pripomienky, ktoré mi pomáhali počas práce na tomto príspevku. Projekt bol podporovaný z grantu GAČR 201/08/0486.

Literatúra

Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses.* Springer, New York.

Rivas, M. J., Santos, M. T., and Morales, D. (2005). Rényi test statistics for partially observed diffusion processes. *J. Statist. Plann. Inference*, 127:91–102.

Seshadri, V. (1999). *The Inverse Gaussian Distribution: Statistical Theory and Applications.* Springer, New York.