

# STOCHASTICKÝ MODEL VÝVOJE EPIDEMIE S VAKCINACÍ

Jakub Staněk

stanekj@karlin.mff.cuni.cz

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky,  
Univerzita Karlova v Praze



## 1 Úvod

Tento příspěvek vychází s publikací [1] a [2]. Je v něm prezentován stochastický model vývoje epidemie onemocnění, které je vysoce infekční a má krátkou dobu uzdravování (typickým onemocněním tohoto typu je chřipka). Díky poměrně krátkému trvání epidemie můžeme předpokládat konstantní velikost populace. Navíc předpokládáme, že tato populace je homogenní ve smyslu výše imunity jedinců a množství kontaktů jednotlivých osob s ostatními osobami. Jak je však ukázáno v [2], tento předpoklad může být z modelu odstraněn.

## 2 Kermack-McKendrickův model s vakcinací

Tento model je verzí Kermack-McKendrickova modelu, do něhož byla přirozeným způsobem přidána vakcinace. V modelu uvažujeme konstantní velikost populace  $N$ , která je rozdělena do tří skupin, jejichž velikost se v čase mění, a to  $x_t$  popisující počet jedinců, kteří jsou zdraví, ale mohou být nakaženi (dále jen "zdraví"),  $y_t$  značící počet nakažených jedinců, kteří jsou přenašeči nemoci (dále jen "nemocní"), a  $z_t$ , což je počet jedinců, kteří nemoc již prodělali, nemohou být znovu nakaženi a nejsou infekční (dále jen "imunní"). Tento model je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} dx_t &= -\beta y_t [x_t - \vartheta(z_t)]^+ dt, & x_0 &> 0, \\ dy_t &= \beta y_t [x_t - \vartheta(z_t)]^+ dt - \gamma y_t dt, & y_0 &> 0, \\ dz_t &= \gamma y_t dt, & z_0 &= 0, \end{aligned}$$

kde  $\beta > 0$  je intenzita přenosu nemoci,  $\gamma > 0$  je intenzita uzdravování a  $\vartheta$  je funkce počtu vakcinovaných jedinců (neklesající funkce  $\mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$ ).

## 3 Stochastický model

Tento model je přirozenou stochastickou verzí předchozího deterministického modelu. Uvažujeme stejně jako v předchozím modelu konstantní velikost populace  $N$ , která je rozdělena na zdravé ( $X_t$ ), nemocné ( $Y_t$ ) a imunní jedince ( $Z_t$ ). Model je popsán stochastickou diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} dX_t &= -\beta Y_t [X_t - \vartheta(Z_t)]^+ dt + \sqrt{\beta Y_t [X_t - \vartheta(Z_t)]^+} dW_t, \\ dY_t &= \beta Y_t [X_t - \vartheta(Z_t)]^+ dt - \gamma Y_t dt - \sqrt{\beta Y_t [X_t - \vartheta(Z_t)]^+} dW_t, \\ dZ_t &= \gamma Y_t dt \end{aligned} \quad (R1)$$

s počáteční podmínkou  $X_0 > 0$ ,  $Y_0 > 0$ ,  $Z_0 = 0$ .

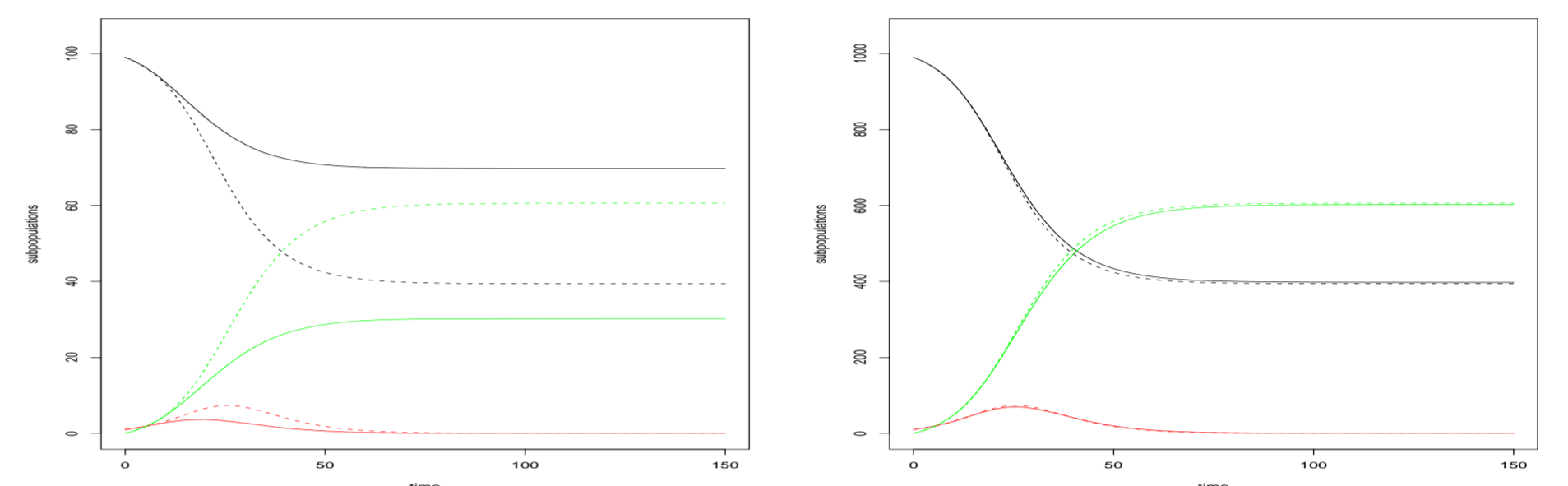
$\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  a  $\vartheta$  zde mají stejný význam jako v deterministickém modelu a  $W_t$  značí Wienerův proces.

Uvažujeme-li  $\vartheta$  lokálně lipschitzovskou funkci na  $(0, N]$  a omezenou na  $[0, N]$ , pak existuje jediný proces  $(X, Y, Z)$ , který je řešením rovnice (R1) a je absorbován v bariéře  $B = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = 0 \vee y = 0\}$ .

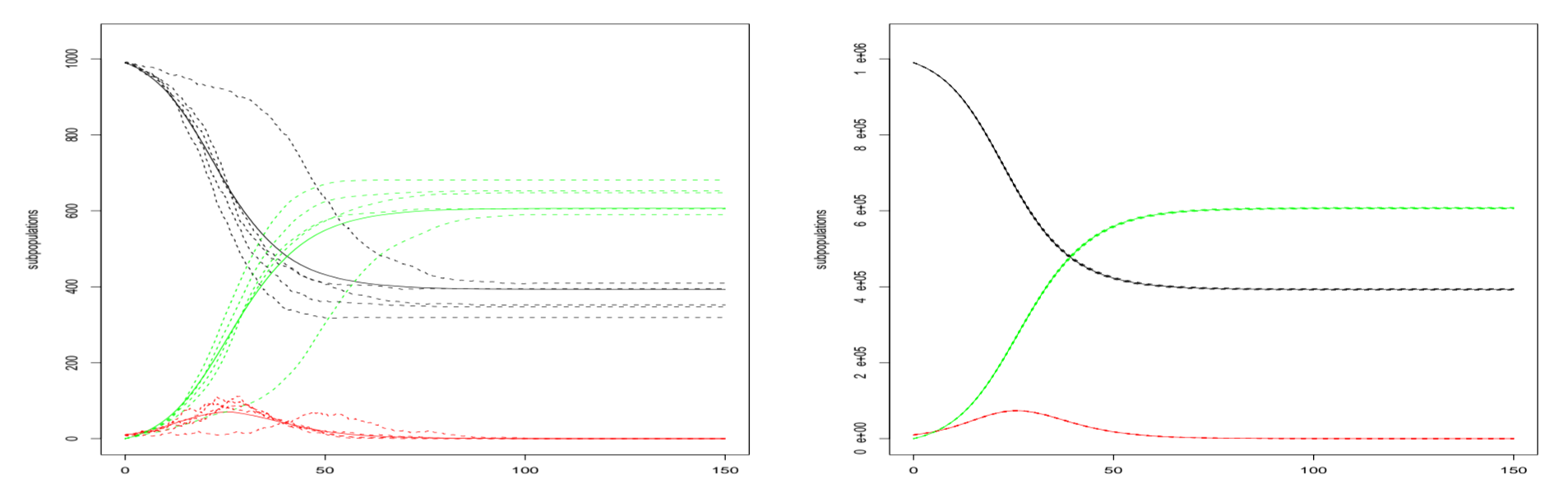
## 4 Simulace

V následujících ukázkách simulací bylo zvoleno  $\gamma = 0.25$ ,  $\beta = 0.38$  (Obrázek 1 a Obrázek 2), resp.  $\beta = 0.3$  (Obrázek 3), a počáteční

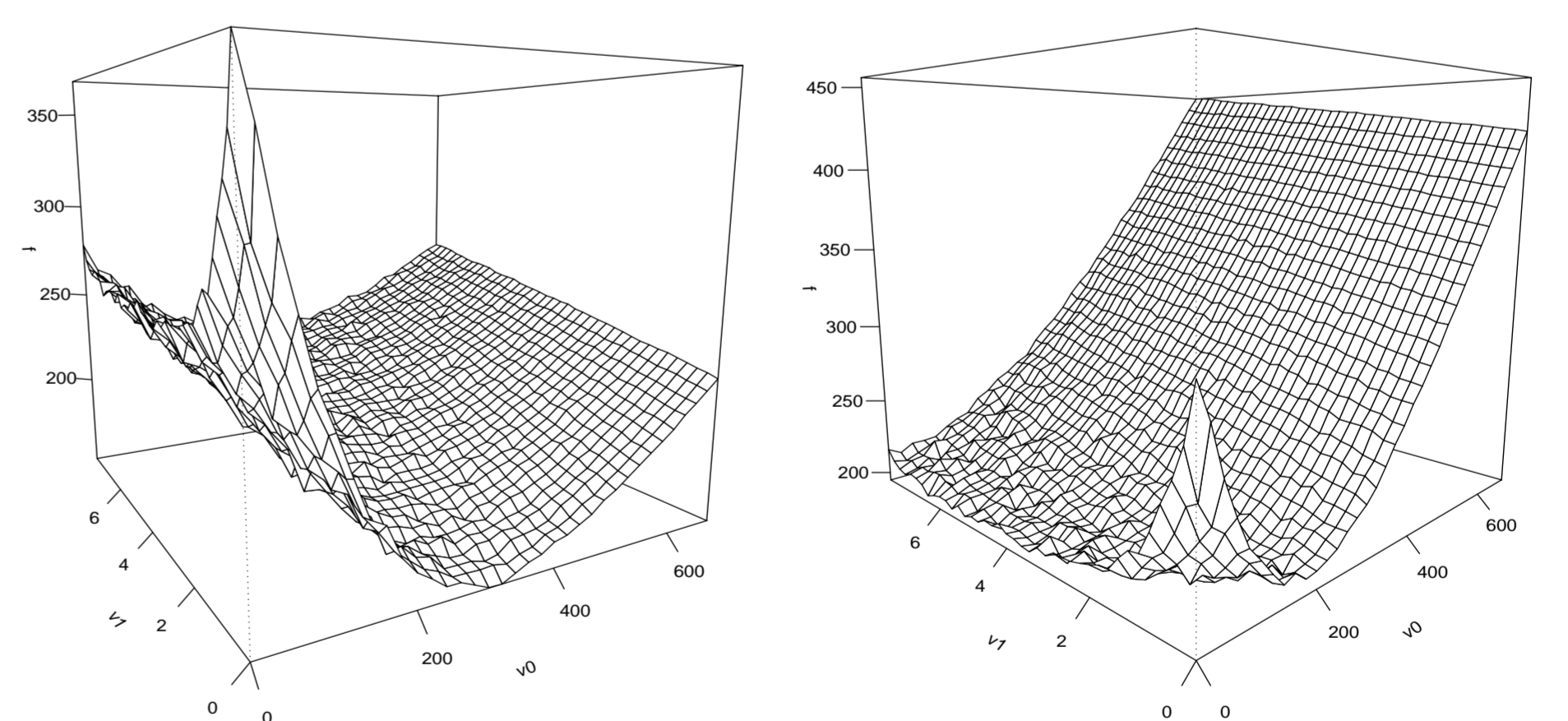
podmínka  $Y_0 = 0.01 * N$  (tj. na počátku trpí chorobou jedno procento populace). Doba, pro kterou byla simulace provedena, je 150 (dní). V prvních dvou obrázcích byla (pro větší názornost) zvolena nulová vakcinace.



**Obrázek 1.** Na obrázku je znázorněn rozdíl mezi řešením deterministického modelu (čárkovaná čára) a střední hodnotou řešení stochastického modelu (plná čára). Zatímco pro populaci čítající 100 jedinců je rozdíl zřetelný (graf vlevo), pro větší populaci složenou z 1000 jedinců (graf vpravo) je již rozdíl zanedbatelný. Počet zdravých jedinců je znázorněn černě, nemocných jedinců červeně a imunních jedinců zeleně.



**Obrázek 2.** Na obrázku je střední hodnota řešení stochastického modelu (plná čára) a pět realizací tohoto modelu (čárkovaná čára). Zatímco pro menší populaci (1000 jedinců, graf vlevo) se průběh jednotlivých realizací podstatně liší od jejich střední hodnoty, pro velkou populaci (1 milion jedinců, obrázek vpravo) jsou všechny průběhy podobné a téměř splývají s řešením deterministického modelu.



**Obrázek 3.** Na obrázku je ukázána různá efektivita lineární vakcinace v závislosti na zvolených parametrech. Funkci počtu navakcinovaných jedinců volíme lineární  $\vartheta(z) = v_0 + v_1 * z$  a penalizační funkci volíme ve tvaru  $f = E(Z_{150} + 0.3 * v_0 + 0.4 * v_1 * Z_{150} + 0.5 * T)$  (vlevo) a  $f = E(Z_{150} + 0.6 * v_0 + 0.304 * v_1 * Z_{150})$  (vpravo) (tj. je penalizován počet jedinců, kteří nemoc prodělali, doba trvání epidemie, předvakcinace a vakcinace v průběhu epidemie z důvodů různých nákladů na způsoby vakcinace a léčby).  $Z_{150}$  je počet jedinců, kteří do stanoveného času prodělali nemoc,  $v_0$  je počet předvakcinovaných jedinců,  $v_1 * Z_{150}$  je počet jedinců navakcinovaných v průběhu času a  $T$  je délka doby, po kterou bylo nemocných více než 0.3% populace.

**Poděkování:** Výzkum byl podporován grantem GAČR 201/05/H007.

### Literatura

- [1] Štěpán, J., Staněk, J. (2008): Absorption in Stochastic Epidemics, *Kybernetika*, v recenzním řízení.
- [2] Staněk, J. (2008): Kermack-McKendrick Epidemics Vaccinated, *Kybernetika*, přijato k publikaci.