STOCHASTICKÁ ROVNICE DIFUZE S FRAKCIONÁLNÍM BROWNOVÝM POHYBEM

JANA ŠNUPÁRKOVÁ

snuparkova@karlin.mff.cuni.cz

KPMS MFF UK v Praze a MÚ AV ČR, v.v.i.

SHRNUTÍ

S použitím metod uvedených v [1] nalezneme explicitní formuli pro slabé řešení stochastické rovnice difuze se silně eliptickým operátorem s frakcionálním šumem v singulárním případě $H < \frac{1}{2}$. Stochastický integrál jest chápán ve Skorochodově smyslu.

FRAKCIONÁLNÍ BROWNŮV POHYB

Frakcionální Brownův pohyb $\{B^H(t), t \in [0,T]\}$ s Hurstovým parametrem $H \in (0,1)$ na úplném pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je centrovaný gaussovský proces s kovarianční funkcí

$$R_H(t,s) = \mathbb{E}\,[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}),\ t,s \geq 0.$$

STOCHASTICKÁ ROVNICE

Mějme stochastickou bilineární rovnici

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= A(t)X(t)\mathrm{d}t + BX(t)\mathrm{d}B^H(t), \\ X(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

na intervalu $[0,T]$ v separabilním Hilbertově prostoru V, kde $x_0 \in V$ je deterministická počáteční podmínka a $\{B^H(t), t \in [0,T]\}$ je frakcionální Brownův pohyb s Hurstovým parametrem $H < \frac{1}{2}$. Stochastický integrál

$$\left\{ \int_0^t BX(r)\mathrm{d}B^H(r), t \in [0,T] \right\}$$

je chápán ve Skorochodově smyslu (potřebnou teorii lze najít v [2]). Lineární operátory $\{A(t), t \in [0,T]\}$ a B ve V jsou (obecně neomezené) hustě definované a uzavřené. Předpokládáme, že operátory $\{A(t), t \in [0,T]\}$ generují silně spojitý evoluční systém $\{U_A(t,s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ ve V a operátor B generuje silně spojitou grupu $\{S_B(u), u \in \mathbb{R}\}$ ve V.

SLABÉ ŘEŠENÍ

Buď $A^*(t)$ adjungovaný operátor k operátoru $A(t)$ pro každé $t \in [0,T]$. Předpokládejme, že definiční obor $\mathrm{Dom}(A^*(t)) = D^*$ operátoru $A^*(t)$ je nezávislý na t. Buď $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ úplný pravděpodobnostní prostor. $(\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F})$-měřitelný stochastický proces $\{X(t), t \in [0,T]\}$ je **slabé řešení** rovnice (1) jestliže pro všechna $y \in D^*$

$$\langle X(t), y\rangle_V = \langle x_0, y\rangle_V + \int_0^t \langle X(r), A^*(r)y\rangle_V\,\mathrm{d}r + \int_0^t \langle X(r), B^*y\rangle_V\,\mathrm{d}B^H(r)$$

$\mathbb{P}$-s.j. pro každé $t \in [0,T]$.

TEORETICKÉ VÝSLEDKY

Rozvinuli jsme metody z [1], kde je ukázáno, že proces

$$\{X(t) = S_B\big(B^H(t)\big)U(t,0)x_0, t \in [0,T]\}$$

je v regulárním případě $H > \frac{1}{2}$ a v závislosti na různých předpokladech řešením rovnice (1) v silném, slabém, či „mild“ smyslu, kde $\{U(t,s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ je silně spojitý evoluční systém lineárních operátorů příslušný množině operátorů

$$\{\tilde{A}(t) = A(t) - Ht^{2H-1}B^2, t \in [0,T]\}.$$

V singulárním případě $H < \frac{1}{2}$ dostaneme za jistých předpokladů, že proces $\{X(t), t \in [0,T]\}$ je řešením rovnice (1) ve slabém smyslu, kde $\{U(t,0), t \in [0,T]\}$ je jediným spojitým řešením rovnice

$$y(t) = U_A(t,0)x - \int_0^t Hr^{2H-1}U_A(t,r)B^2y(r)\,\mathrm{d}r.$$

ROVNICE DIFUZE

Uvažujme stochastickou rovnici difuze

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = L(t,x)u + bu(t,x)\frac{\mathrm{d}B^H}{\mathrm{d}t}, \\ &u(0,x) = x_0(x),\ x \in \mathcal{O} \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 0,\ (t,x) \in [0,T] \times \partial\mathcal{O}, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ je omezená oblast třídy $\mathcal{C}^2$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a

$$\begin{aligned} L(t,x)u = a_0(t,x)u(t,x) + \sum_{i=1}^d a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) \\ + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \end{aligned}$$

je silně eliptický operátor na $\mathcal{O}$ stejnoměrně v $(t,x) \in [0,T] \times \bar{\mathcal{O}}$, kde funkce $a_0(t,\,.\,), a_i(t,\,.\,), a_{ij}(t,\,.\,) \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\mathcal{O}})$ pro každé $i,j = 1,\dots,d$ a $t \in [0,T]$.
Rovnice může být přepsána ve tvaru (1), kde $V = L^2(\mathcal{O})$,

$$\big(A(t)u\big)(x) = L(t,x)u,\ \mathrm{Dom}(A(t)) = D = H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O})$$

a $B = b\,\mathrm{id} \in \mathcal{L}(V)$.
Nechť jest splněno, že

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{O}} \{&|a_0(t,x) - a_0(s,x)|, |a_i(t,x) - a_i(s,x)|, |a_{ij}(t,x) - a_{ij}(s,x)|\} \\ &\leq M|t-s|^\gamma \end{aligned}$$

pro každé $s,t \in [0,T]$, $i,j = 1,\dots,d$, nějaké konstanty $M > 0$ a $0 < \gamma < 1$.
Za dalších technických předpokladů má rovnice difuze slabé řešení

$$\{X(t) = \exp\{bB^H(t)\,\mathrm{id}\}U(t,0)x_0, t \in [0,T]\}$$

pro libovolnou počáteční podmínku $x_0 \in L^2(\mathcal{O})$.

PODĚKOVÁNÍ. Děkuji B. Maslowskému za dlouhodobé vedení. Výzkum byl částečně podporován GA ČR grantem č. P201/10/0752 a GA UK grantem č. 9427.

Reference

[1] T.E. Duncan, B. Maslowski, B. Pasik-Duncan: Stochastic equations in Hilbert space with a multiplicative fractional Gaussian noise, *Stochastic Process. Appl.*, 115 , 1357-1383, 2005

[2] P. Cheridito, D. Nualart: Stochastic integral of divergence type with respect to fBm with Hurst parametr $H \in (0, \frac{1}{2})$, *Ann. I. H. Poincaré Probab. Stat.*, 41, 1049-1081, 2005