PODMÍNĚNÁ INTENZITA HAWKESOVA PROCESU

MARKÉTA ZIKMUNDOVÁ

Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta,
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

SHRNUTÍ

Poster prezentuje odhad podmíněné intenzity Hawkesova bodového procesu událostí na trajektorii stochastického pohybu. Zabývá se časovým a prostorovým odhadem pomocí částicového filtru.

HAWKESŮV NEKÓTOVANÝ PROCES

Hawkesův bodový proces X na polopřímce $(0,\infty)$ sestává z dvou typů bodů–rodičovských a potomků [4]

(i) Rodičovské body se řídí Poissonovým procesem s lokálně integrovatelnou mírou intenzity $\mu(t),\ t \in \mathbb{R}$.

(ii) Každý rodič t_i generuje shluk C_i, který sestává z událostí generací $n = 0, 1, \ldots$. Rodičovský proces tvoří generaci 0. Pro dané $n = 0, 1, \ldots$ potomci $t_j \in C_i$ generují Poissonův proces Φ_j generace $n+1$ s funkcí intenzity $\gamma_j(t) = \gamma(t - t_j),\ t > t_j$, kde γ je nezáporná měřitelná funkce na $(0,\infty)$.

(iii) Shluky C_i určené rodičovským procesem jsou nezávislé.

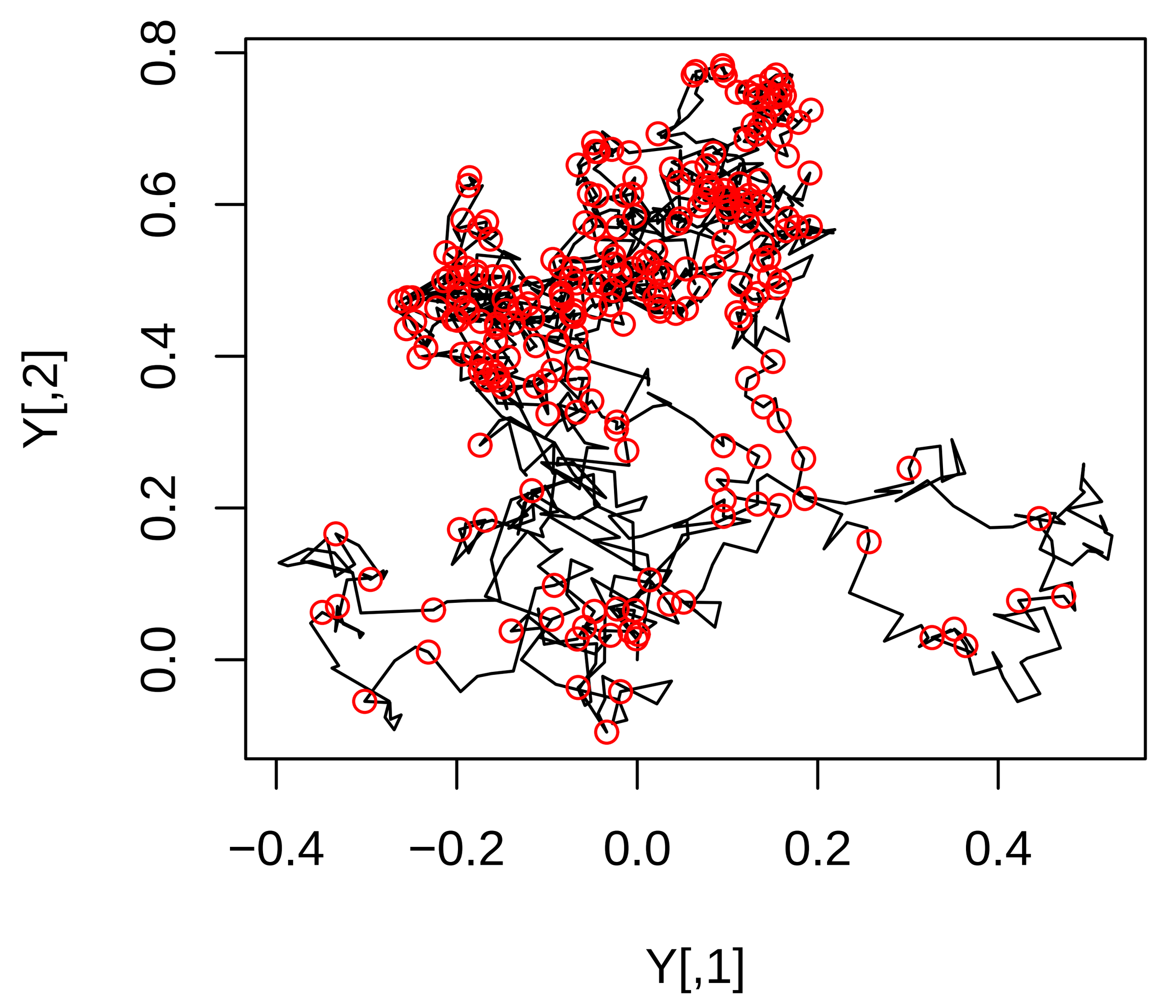
(iv) Proces X sestává ze sjednocení všech shluků.

STOCHASTICKÝ POHYB V OMEZENÉ ARÉNĚ

Uvažujme stochastický pohyb v omezené (kruhové) aréně popsaný modelem

$$dY_t = b(Y_t, t)dt + \sigma(Y_t, t)dW_t, \tag{1}$$

$t \in [0, T]$, kde $\sigma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}$, $b : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a W_t je dvoudimenzionální Wienerův proces. Na trajektorii pohybu pozorujeme události, které tvoří Hawkesův nekótovaný bodový proces N.



Simulace Hawkesova procesu umístěného na trajektorii dvoudimenzionálního stochastického pohybu generovaného pomocí Eulerovy metody.

PODMÍNĚNÁ INTENZITA BODOVÉHO PROCESU

Podmíněná intenzita bodového procesu $N(t)$ je stochastický proces λ^*

$$\lambda^*(t)dt \approx \mathbb{E}[N(dt)|\mathcal{H}_{t-}], \tag{2}$$

kde $\mathcal{H}_{t-}$ značí historii bodového procesu až do času t [1].

Diskrétní modely podmíněné intenzity

Pro podmíněnou intenzitu bodového procesu událostí na trajektorii stochastického pohybu daného rovnicí (1) uvažujme v čase diskrétní model

$$\lambda_k^*(y_k) = \exp\left\{\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=-j}^{j}\theta_k^{j,i} Z_j^i(y_k)\right\}, \tag{3}$$

kde y_k značí pozici pohybu v čase k, Z_j^i je $i-$tá komponenta Zernickeho polynomu $j-$tého řádu a $\theta_k^{j,i}$ příslušné koeficienty.

Podmíněná intenzita Hawkesova procesu

Pro nekótovaný Hawkesův proces můžeme podmíněnou intenzitu vyjádřit ve tvaru

$$\lambda^*(t, y) = \mu(t) + \sum_{0<t_i<t} \gamma(t - t_i, y) \tag{4}$$

Uvažovaný parametrický model podmíněné intenzity je $\gamma(t) = ae^{-\beta t}$.

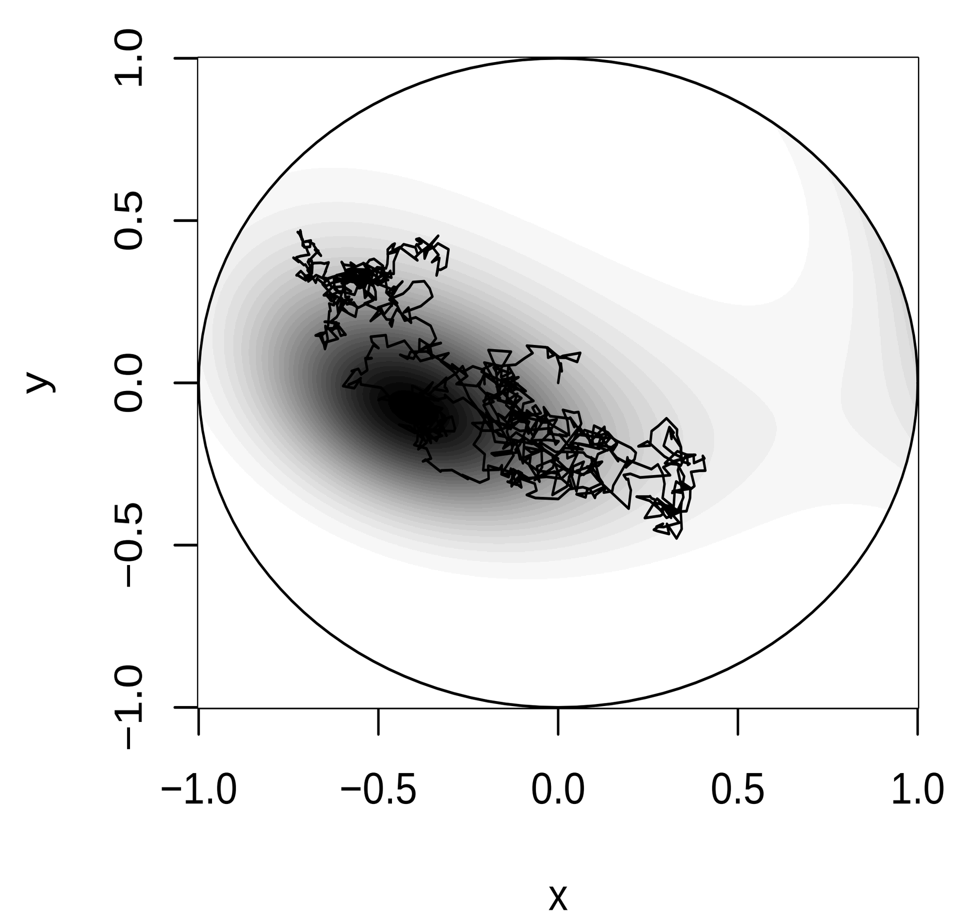
ČÁSTICOVÝ FILTR

Parametry θ v rovnici (3) odhadujeme metodou filtrování. Rekurzivní systém rovnic pro odhad aposteriorní hustoty $p(\theta_k|N_{1:k})$ je

$$p(\theta_k|N_{1:k}) = \frac{p(\theta_k|N_{1:k-1})p(\Delta N_k|N_{1:k-1}, \theta_k)}{p(\Delta N_k|N_{1:k-1})}. \tag{5}$$

$$p(\theta_k|N_{1:k-1}) = \int p(\theta_k|\theta_{k-1})p(\theta_{k-1}|N_{1:k-1})d\theta_{k-1}. \tag{6}$$

Zde užíváme sekvenční Monte–Carlo, specielně částicový filtr [2], [3].



Intenzita $\mu(t) \equiv 150$ a $\gamma(t)$ je dána parametry $a = 1{,}8$ a $\beta = 2$.

References.

[1] Daley D.J., Vere–Jones D. (2003). *An Introduction to The Theory of Point Processes, Vol. I: Elementary Theory and Methods* 2nd ed., Springer: New York.

[2] Doucet A., de Freitas N., Gordon N. (2001). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Springer, New York.

[3] Ergun A., Barbieri R., Eden U.T., Wilson M.A., Brown E.N. (2007). *Construction of point process adaptive filter algorithms for neural system using sequential Monte Carlo methods.* IEEE Trans. on Biomedical Engineering **54**, 3, 419–28.

[4] Møller J., Rasmussen J.G. (2006). *Approximate simulation of Hawkes process.* Methodol Comput Appl Probab 2006, **8**, 53–64.