



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

www.KMA.zcu.cz
SINCE 1954

Stabilita optimální volby portfolia Markowitzova modelu

ROBUST 2012, Němčičky

Blanka Šedivá, katedra matematiky FAV ZČU

10.-14.9.2012

1 Markowitzův model optimální volby portfolia

2 Využití principů teorie náhodných matic

3 Simulovaná data

4 Reálná data

5 Závěr

- 1 Markowitzův model optimální volby portfolia
- 2 Využití principů teorie náhodných matic
- 3 Simulovaná data
- 4 Reálná data
- 5 Závěr

- 1 Markowitzův model optimální volby portfolia
- 2 Využití principů teorie náhodných matic
- 3 Simulovaná data
- 4 Reálná data
- 5 Závěr

- 1 Markowitzův model optimální volby portfolia
- 2 Využití principů teorie náhodných matic
- 3 Simulovaná data
- 4 Reálná data
- 5 Závěr

- 1 Markowitzův model optimální volby portfolia
- 2 Využití principů teorie náhodných matic
- 3 Simulovaná data
- 4 Reálná data
- 5 Závěr

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ **racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace**
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Markowitzův model

- ▶ model výběru optimálního portfolia na kapitálovém trhu (Harry Max Markowitz, 1952)
- ▶ ideální trh bez transakčních nákladů, bez arbitráže, s neomezeně dělitelnými aktivy, ...
- ▶ racionální, riziko averzní investoři, kteří mají k dispozici stejné informace
- ▶ aktiva $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ jsou popsána náhodnými veličinami X_i se známými středními hodnotami $E X_i = \mu_i$ a variační maticí $V = (\text{cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,2,\dots,N}$
- ▶ X_i charakterizují výnosnost aktiv
- ▶ $E X_i$ očekávaná výnosnost (R_i)
- ▶ $\text{var } X_i = \text{cov}(X_i, X_i)$ rizikovost aktiva (σ_i^2)

Mean - variance efektivní portfolio

- ▶ složení portfolia je určeno vahami w_i , pro které platí $\sum_i w_i = 1$
- ▶ výnosnost portfolia $R_p = \sum_i w_i R_i$
- ▶ rizikovost portfolia $\sigma_p^2 = w^T V w$
- ▶ investor maximalizuje výnos R_p a minimalizuje riziko σ_p^2
- ▶ Markowitzovo efektivní portfolio je dáno vahami w_i^* tak, že neexistují jiné váhy takové, že platí $R_{p^*} \leq R_p$ a současně $\sigma_{p^*}^2 \geq \sigma_p^2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá

Mean - variance efektivní portfolio

- ▶ složení portfolia je určeno vahami w_i , pro které platí $\sum_i w_i = 1$
- ▶ výnosnost portfolia $R_p = \sum_i w_i R_i$
- ▶ rizikovost portfolia $\sigma_p^2 = w^T V w$
- ▶ investor maximalizuje výnos R_p a minimalizuje riziko σ_p^2
- ▶ Markowitzovo efektivní portfolio je dáno vahami w_i^* tak, že neexistují jiné váhy takové, že platí $R_{p^*} \leq R_p$ a současně $\sigma_{p^*}^2 \geq \sigma_p^2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá

Mean - variance efektivní portfolio

- ▶ složení portfolia je určeno vahami w_i , pro které platí $\sum_i w_i = 1$
- ▶ výnosnost portfolia $R_p = \sum_i w_i R_i$
- ▶ rizikovost portfolia $\sigma_p^2 = w^T V w$
- ▶ investor maximalizuje výnos R_p a minimalizuje riziko σ_p^2
- ▶ Markowitzovo efektivní portfolio je dáno vahami w_i^* tak, že neexistují jiné váhy takové, že platí $R_{p^*} \leq R_p$ a současně $\sigma_{p^*}^2 \geq \sigma_p^2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá

Mean - variance efektivní portfolio

- ▶ složení portfolia je určeno vahami w_i , pro které platí $\sum_i w_i = 1$
- ▶ výnosnost portfolia $R_p = \sum_i w_i R_i$
- ▶ rizikovost portfolia $\sigma_p^2 = w^T \mathbf{V} w$
- ▶ investor maximalizuje výnos R_p a minimalizuje riziko σ_p^2
- ▶ Markowitzovo efektivní portfolio je dáno vahami w_i^* tak, že neexistují jiné váhy takové, že platí $R_{p^*} \leq R_p$ a současně $\sigma_{p^*}^2 \geq \sigma_p^2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá

Mean - variance efektivní portfolio

- ▶ složení portfolia je určeno vahami w_i , pro které platí $\sum_i w_i = 1$
- ▶ výnosnost portfolia $R_p = \sum_i w_i R_i$
- ▶ rizikovost portfolia $\sigma_p^2 = w^T \mathbf{V} w$
- ▶ investor maximalizuje výnos R_p a minimalizuje riziko σ_p^2
- ▶ Markowitzovo efektivní portfolio je dáno vahami w_i^* tak, že neexistují jiné váhy takové, že platí $R_{p^*} \leq R_p$ a současně $\sigma_{p^*}^2 \geq \sigma_p^2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá

Optimální portfolio

- ▶ nechť V je regulární (žádné aktivum zahrnuté do portfolia není bezrizikové), vektory R a $\mathbf{1}$ jsou lineárně nezávislé (výnosnosti alespoň dvou aktiv jsou různé) a $\mathbf{1}^T V R \neq 0$, pak při libovolně zvolené hodnotě $R_p \geq R_{min}$ existuje vždy jediný vektor vah w , který minimalizuje rozptyl při omezující podmínce $Rw \geq R_p$ a tento vektor vah je vyjádřen vztahem

$$w(R_p) = \mu_1 \frac{V^{-1}R}{\mathbf{1}^T V^{-1}R} + \mu_2 \frac{V^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1}},$$

kde μ_1 a μ_2 lze získat řešením soustavy $R^T w = R_p, \mathbf{1}w = 1$

- ▶ rozšiřující modely pak umožňují volbu optimální portfolio pro konkrétního investora, které záleží bezrizikových sazbách dostupných na trhu a na volbě indiferenčních křivek vztahu investora k riziku

Optimální portfolio

- ▶ necht V je regulární (žádné aktivum zahrnuté do portfolia není bezrizikové), vektory R a $\mathbf{1}$ jsou lineárně nezávislé (výnosnosti alespoň dvou aktiv jsou různé) a $\mathbf{1}^T V R \neq 0$, pak při libovolně zvolené hodnotě $R_p \geq R_{min}$ existuje vždy jediný vektor vah w , který minimalizuje rozptyl při omezující podmínce $Rw \geq R_p$ a tento vektor vah je vyjádřen vztahem

$$w(R_p) = \mu_1 \frac{V^{-1}R}{\mathbf{1}^T V^{-1}R} + \mu_2 \frac{V^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}^T V^{-1}\mathbf{1}},$$

kde μ_1 a μ_2 lze získat řešením soustavy $R^T w = R_p, \mathbf{1}w = 1$

- ▶ rozšiřující modely pak umožňují volbu optimální portfolio pro konkrétního investora, které záleží bezrizikových sazbách dostupných na trhu a na volbě indifferenčních křivek vztahu investora k riziku

Teorie náhodných matic (RMT)

- ▶ původně fyzikální aplikace při popisu spektrálních vlastností atomových jader (Dyson, F., Mehta, M. -1962,1963)
- ▶ současné použití na aplikace ve vícerozměrných časových řadách Plerou, V. et al.: Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Phys.Rev. E.*,2002, Laloux, L. et al.: Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. App. Finance*,2000
- ▶ globální akciové trhy největších akciových společností obchodovaných na světových trzích
- ▶ 30-minutové výnosy 1 000 největších US akcií v rozmezí dvou let 1994–1995
- ▶ 452 akciových společností zahrnutých v indexu S&P500, $T=1500$

Teorie náhodných matic (RMT)

- ▶ původně fyzikální aplikace při popisu spektrálních vlastností atomových jader (Dyson, F., Mehta, M. -1962,1963)
- ▶ současné použití na aplikace ve vícerozměrných časových řadách Plerou, V. et al.: Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Phys.Rev. E.*,2002, Laloux, L. et al.: Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. App. Finance*,2000
- ▶ globální akciové trhy největších akciových společností obchodovaných na světových trzích
- ▶ 30-minutové výnosy 1 000 největších US akcií v rozmezí dvou let 1994–1995
- ▶ 452 akciových společností zahrnutých v indexu S&P500, $T=1500$

Teorie náhodných matic (RMT)

- ▶ původně fyzikální aplikace při popisu spektrálních vlastností atomových jader (Dyson, F., Mehta, M. -1962,1963)
- ▶ současné použití na aplikace ve vícerozměrných časových řadách Plerou, V. et al.: Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Phys.Rev. E.*,2002, Laloux, L. et al.: Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. App. Finance*,2000
- ▶ globální akciové trhy největších akciových společností obchodovaných na světových trzích
- ▶ 30-minutové výnosy 1 000 největších US akcií v rozmezí dvou let 1994–1995
- ▶ 452 akciových společností zahrnutých v indexu S&P500, $T=1500$

Teorie náhodných matic (RMT)

- ▶ původně fyzikální aplikace při popisu spektrálních vlastností atomových jader (Dyson, F., Mehta, M. -1962,1963)
- ▶ současné použití na aplikace ve vícerozměrných časových řadách Plerou, V. et al.: Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Phys.Rev. E.*,2002, Laloux, L. et al.: Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. App. Finance*,2000
- ▶ globální akciové trhy největších akciových společností obchodovaných na světových trzích
- ▶ 30-minutové výnosy 1 000 největších US akcií v rozmezí dvou let 1994–1995
- ▶ 452 akciových společností zahrnutých v indexu S&P500, T=1500

Teorie náhodných matic (RMT)

- ▶ původně fyzikální aplikace při popisu spektrálních vlastností atomových jader (Dyson, F., Mehta, M. -1962,1963)
- ▶ současné použití na aplikace ve vícerozměrných časových řadách Plerou, V. et al.: Random matrix approach to cross correlations in financial data. *Phys.Rev. E.*,2002, Laloux, L. et al.: Random matrix theory and financial correlations. *Int. J. Theor. App. Finance*,2000
- ▶ globální akciové trhy největších akciových společností obchodovaných na světových trzích
- ▶ 30-minutové výnosy 1 000 největších US akcií v rozmezí dvou let 1994–1995
- ▶ 452 akciových společností zahrnutých v indexu S&P500, $T=1500$

Vlastní čísla korelační matice

- ▶ uvažujme empirickou korelační matici $R = \frac{1}{T}AA^T$, kde A je matice ($N \times T$) s i.i.d. prvky s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem σ^2
- ▶ pro $Q = \frac{T}{N} \geq 1$ pevné, platí pro $N \rightarrow \infty$ a $T \rightarrow \infty$ rozdělení vlastních čísel

$$P(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max}-\lambda)(\lambda-\lambda_{min})}}{\lambda} & \text{pro } \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$\text{kde } \lambda_{max/min} = \sigma^2 \left(1 + 1/Q \pm 2\sqrt{1/Q} \right)$$

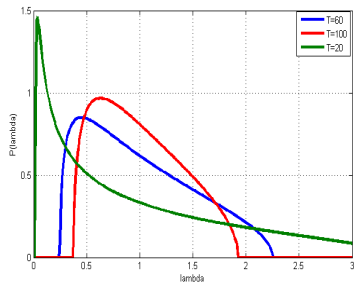
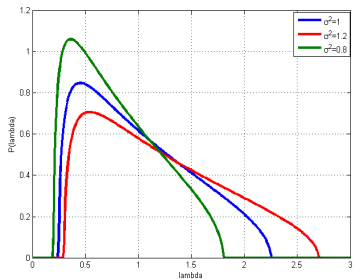
Vlastní čísla korelační matice

- ▶ uvažujme empirickou korelační matici $R = \frac{1}{T} \mathbf{A} \mathbf{A}^T$, kde \mathbf{A} je matice ($N \times T$) s i.i.d. prvky s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem σ^2
- ▶ pro $Q = \frac{T}{N} \geq 1$ pevné, platí pro $N \rightarrow \infty$ a $T \rightarrow \infty$ rozdělení vlastních čísel

$$P(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{max}-\lambda)(\lambda-\lambda_{min})}}{\lambda} & \text{pro } \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$\text{kde } \lambda_{max/min} = \sigma^2 \left(1 + 1/Q \pm 2\sqrt{1/Q} \right)$$

$P(\lambda)$ pro různé hodnoty σ^2 a T



Simulovaná data

- ▶ **simulované modely časových řad akcií**

- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$

- ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
- ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)

- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

Simulovaná data

- ▶ simulované modely časových řad akcií
- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$
 - ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
 - ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)
- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

Simulovaná data

- ▶ simulované modely časových řad akcií
- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$
 - ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
 - ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)
- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

Simulovaná data

- ▶ simulované modely časových řad akcií
- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$
 - ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
 - ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)
- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

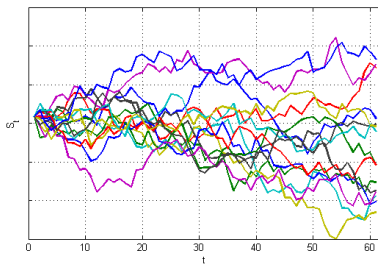
Simulovaná data

- ▶ simulované modely časových řad akcií
- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$
 - ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
 - ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)
- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

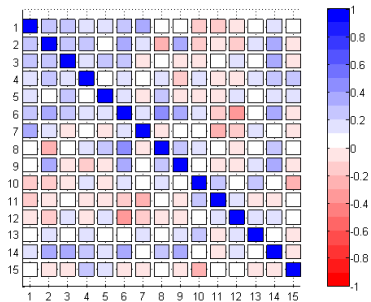
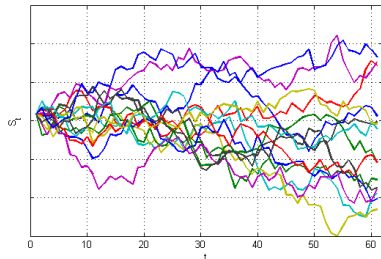
Simulovaná data

- ▶ simulované modely časových řad akcií
- ▶ $dS_t = F(t, S_t)dt + G(t, S_t)dW$
 - ▶ $F(t, S_t)$ driftová složka (očekávaná výnosnost akcií, počáteční hodnota S_0)
 - ▶ $G(t, S_t)$ difúzní složka (variabilita akcií)
- ▶ počet generovaných řad $N = 15$, délka generovaných řad $T = 60$
- ▶ simulované časové řady reprezentující jednotlivé akcie jsou korelovány (korelační matice C)

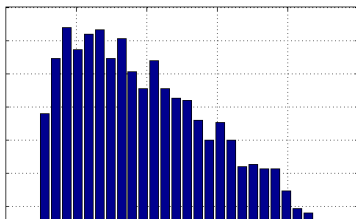
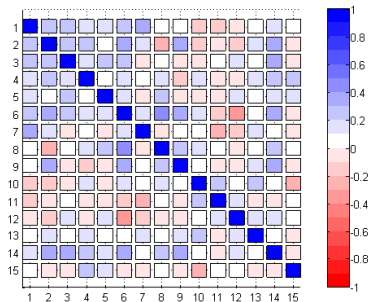
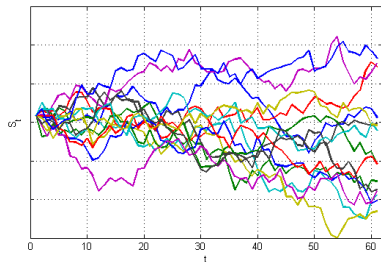
Simulované časové řady aktiv



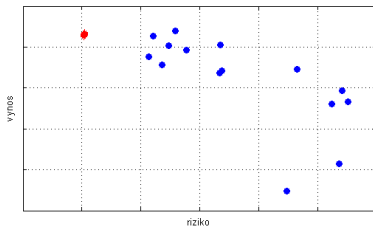
Simulované časové řady aktiv



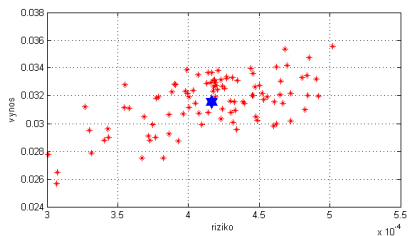
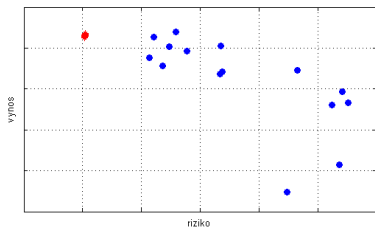
Simulované časové řady aktiv



Optimální portfolium



Optimální portfolium



Reálná data

- ▶ **Burza cenných papírů Praha, a.s.**
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD

- ▶ AAA (24.9.2007),
CETV (27.6.2005),
ČEZ (3.1.2005),
ERSTE (3.1.2005),
FORTUNA (22.10.2010),
KITD (28.1.2010),
KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
NWR (6.5.2011),
ORCO (1.2.2005),
PEGAS (18.12.2006),
PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
TELEFONICA (3.1.2005),
UNIPETROL (3.1.2005),
VIG (5.2.2008)

- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)

- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD

- ▶ ▶ AAA (24.9.2007),
CETV (27.6.2005),
ČEZ (3.1.2005),
ERSTE (3.1.2005),
FORTUNA (22.10.2010),
KITD (28.1.2010),
KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
NWR (6.5.2011),
ORCO (1.2.2005),
PEGAS (18.12.2006),
PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
TELEFONICA (3.1.2005),
UNIPETROL (3.1.2005),
VIG (5.2.2008)

- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶ ▶ AAA (24.9.2007),
CETV (27.6.2005),
ČEZ (3.1.2005),
ERSTE (3.1.2005),
FORTUNA (22.10.2010),
KITD (28.1.2010),
KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
NWR (6.5.2011),
ORCO (1.2.2005),
PEGAS (18.12.2006),
PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
TELEFONICA (3.1.2005),
UNIPETROL (3.1.2005),
VIG (5.2.2008)
- ▶ ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - CETV (27.6.2005),
 - ČEZ (3.1.2005),
 - ERSTE (3.1.2005),
 - FORTUNA (22.10.2010),
 - KITD (28.1.2010),
 - KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - NWR (6.5.2011),
 - ORCO (1.2.2005),
 - PEGAS (18.12.2006),
 - PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - TELEFONICA (3.1.2005),
 - UNIPETROL (3.1.2005),
 - VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ **KITD (28.1.2010),**
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ **KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),**
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ **NWR (6.5.2011),**
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ **ORCO (1.2.2005),**
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)

- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)

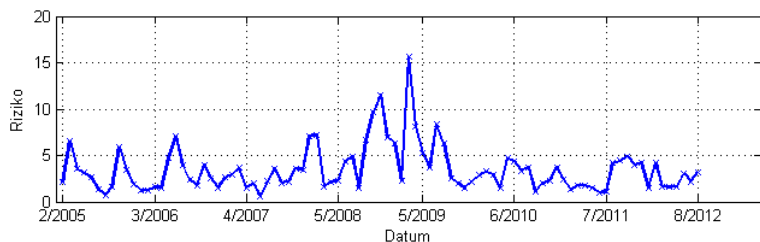
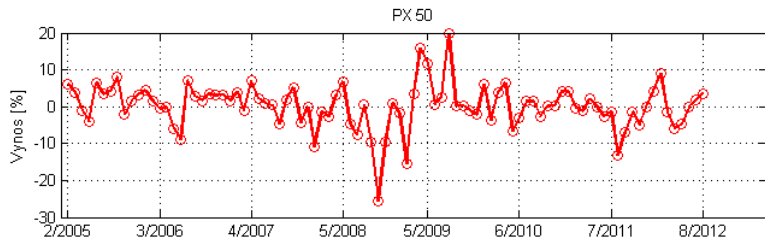
- ▶ data očištěna o výplaty dividend

▶ logaritmické 20-ti denní výnosy

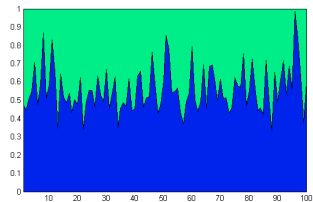
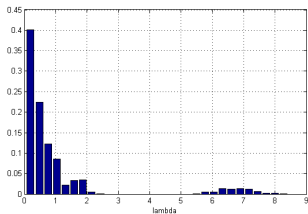
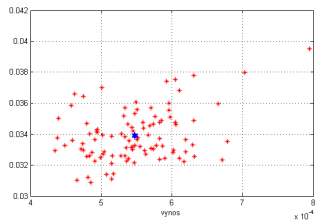
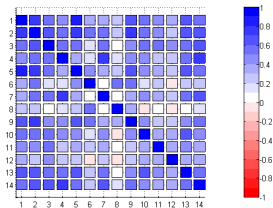
Reálná data

- ▶ Burza cenných papírů Praha, a.s.
- ▶ denní zavírací ceny ze systému SPAD
- ▶
 - ▶ AAA (24.9.2007),
 - ▶ CETV (27.6.2005),
 - ▶ ČEZ (3.1.2005),
 - ▶ ERSTE (3.1.2005),
 - ▶ FORTUNA (22.10.2010),
 - ▶ KITD (28.1.2010),
 - ▶ KOMERČNÍ BANKA (3.1.2005),
 - ▶ NWR (6.5.2011),
 - ▶ ORCO (1.2.2005),
 - ▶ PEGAS (18.12.2006),
 - ▶ PHILIP MORRIS ČR (3.1.2005),
 - ▶ TELEFONICA (3.1.2005),
 - ▶ UNIPETROL (3.1.2005),
 - ▶ VIG (5.2.2008)
- ▶ data očištěna o výplaty dividend
- ▶ **logaritmické 20-ti denní výnosy**

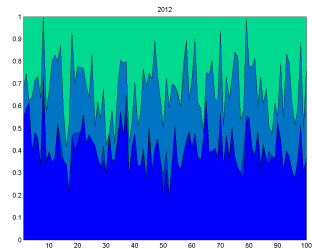
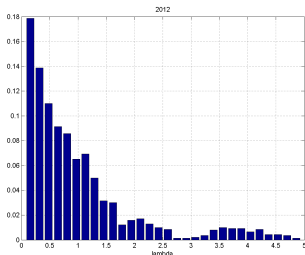
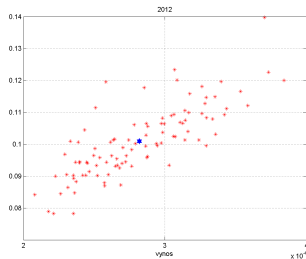
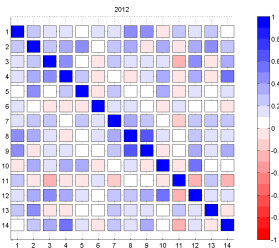
PX 50 měsíční údaje



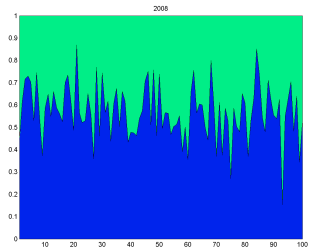
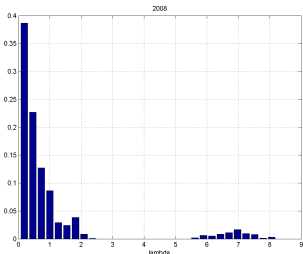
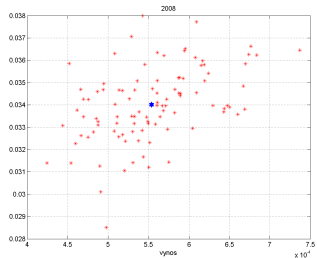
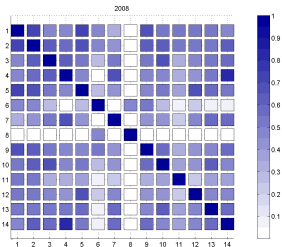
Výstupy na základě hodnot 2005-2012



Výstupy na základě ročních hodnot 2012

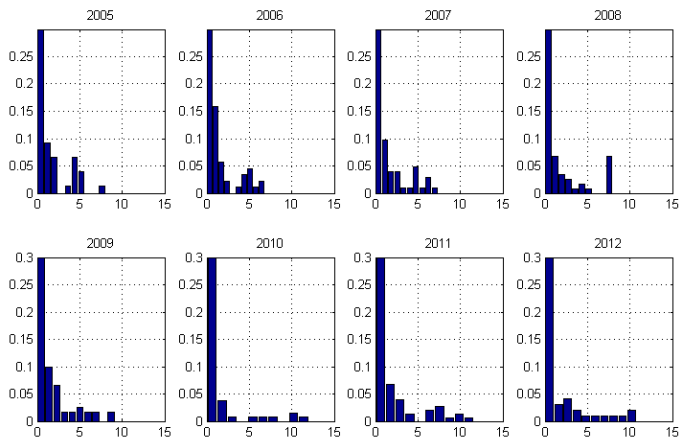


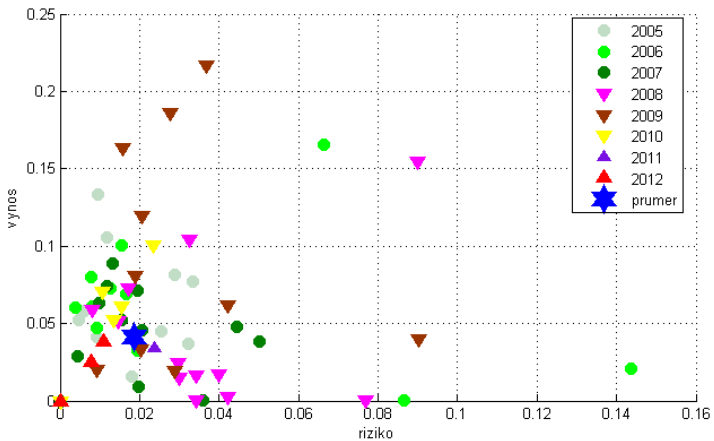
Výstupy na základě ročních hodnot 2008



$$\lambda \geq \lambda_{max}$$

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
2005		13.7	13.8	13.9	13.7	13	12.9	14.1	14.2	13.4	14.7	13.8
2006	14.4	15.2	14.5	15.1	13.1	13.8	12.3	12.0	12.9	13.2	12.8	13.9
2007	11.5	12.5	12.1	11.6	12.8	14.2	14.5	11.5	11.8	13.2	10.5	12.8
2008	12.8	14.7	12.4	11.8	13.7	12.2	11.6	12.9	12.1	10.9	9.9	10.4
2009	12.4	11.6	13.9	12.3	12.6	11.3	11.9	12.6	9.6	9.5	8.8	7.3
2010	4.8	6.5	3.5	3.8	5.1	6.5	5.2	5.2	6.9	8.4	10.1	12.4
2011	13.8	15.4	13.3	12.8	10.2	11.9	13.0	12.1	13.5	12.0	8.8	12.7
2012	12.8	10.5	11.5	13.0	10.5							





Děkuji za pozornost.