

# Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu



Eliška Cézová



Centrum pro jakost a spolehlivost výroby,  
Ústav technické matematiky,  
Fakulta strojní  
České vysoké učení technické v Praze

Robust 2012  
9. – 14. září 2012, Němčičky



INVESTMENTS IN EDUCATION DEVELOPMENT

# Obsah

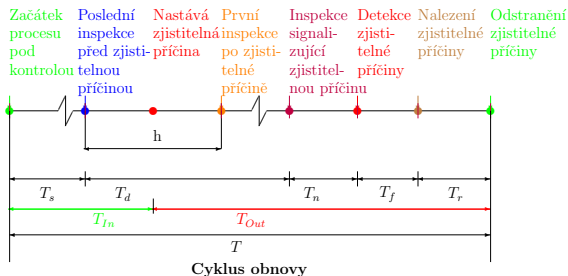
Úvod

Základní model

Rozšířený model

Model s údržbou

# Celková doba procesu



$T_{In}$  délka doby procesu pod kontrolou

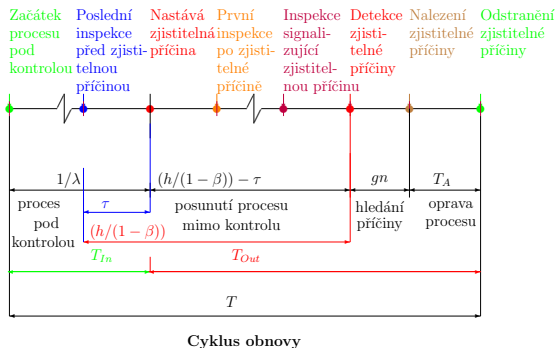
$T_{Out}$  délka doby procesu mimo kontrolu

Celková doba procesu je součet středních hodnot délek jednotlivých období:

$$E(T) = E(T_s) + E(T_d) + E(T_n) + E(T_f) + \gamma E(T_r),$$

- ▶  $T_s$  doba od počátku běhu procesu do  $s$ -té inspekce, kdy je proces pod kontrolou [hod]
- ▶  $T_d$  doba od  $s$ -té inspekce do  $n$ -té inspekce při níž je posun detekován [hod]
- ▶  $T_n$  doba potřebná pro odebrání  $n$  vzorků a zakreslení výsledků měření do regulačního diagramu při inspekci [hod]
- ▶  $T_f$  doba potřebná k nalezení zjištěné příčiny, která způsobila posun v procesu [hod]
- ▶  $T_r$  doba potřebná k opravení zjištěné příčiny [hod]
- ▶  $\gamma = 1$  proces pracuje po dobu opravy (mimo statistickou kontrolu) a  $\gamma = 0$  pokud proces po dobu opravy stojí.

# Délka cyklu procesu pro Duncanův model



## Duncanův model

**Příklad:** Vypočítejme minimální náklady pro daný výrobní proces regulovaný pomocí Shewhartova regulačního diagramu.

- ▶ Posun ve střední hodnotě  $\delta = 2$ .
- ▶ Pravděpodobnost vzniku poruchy  $\lambda = 0.01$ .
- ▶ Náklady za hodinu procesu ve stavu pod kontrolou a mimo kontrolu  $M = 100$  Kč.
- ▶ Inspekce jsou prováděny každé tři minuty tj.  $g = 0.05$  hod.
- ▶ Doba k nalezení zjištěté příčiny  $T_A = 2$  hod.
- ▶ Náklady na falešný signál  $C_f = 50$  Kč.
- ▶ Náklady na hledání zjištěté příčiny  $C_r = 25$  Kč.
- ▶ Náklady na odebrání vzorků a zakreslení výběrového bodu do regulačního digramu  $C_F = 0.50$  Kč.
- ▶ Náklady na měření odebraného vzorku  $C_V = 0.10$  Kč.

$$L = \frac{\lambda MB + \frac{\alpha C_f}{h} + \lambda C_r}{1 + \lambda B} + \frac{C_s}{h} \quad (1)$$

$$\lambda h \frac{\partial B}{\partial n} \left( M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) + C_V (1 + \lambda B)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\lambda h^2 \frac{\partial B}{\partial h} \left( M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) - \alpha C_f (1 + \lambda B) - C_s (1 + \lambda B)^2 = 0 \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial B}{\partial k} \left( M - \frac{\alpha C_f}{h} - \lambda C_r \right) + \frac{C_f}{h} \frac{\partial \alpha}{\partial k} (1 + \lambda B) = 0 \quad (4)$$

$$- \frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial n} + C_V \doteq 0, \quad (5)$$

$$\lambda h^2 M \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{2} \right) - \alpha C_f - C_s \doteq 0, \quad (6)$$

$$- \frac{\lambda h^2 M}{P^2} \frac{\partial P}{\partial k} + C_f \frac{\partial \alpha}{\partial k} \doteq 0. \quad (7)$$

# Duncanův model

$n$  volíme od 1 . . . 25

$$k = \sqrt{-2 \log \frac{C_V \sqrt{2\pi n}}{\delta C_f}}. \quad (8)$$

$$h \doteq \sqrt{\frac{\alpha C_f + C_s}{\lambda M \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{2}\right)}}. \quad (9)$$

Dopočítané hodnoty  $k$ ,  $h$  a  $L$ .

$n$	$k$	$\alpha$	$P$	$h$	$B$	$L$
1	3.4609	0.00053843	0.0720	0.2164	4.9467	7.8426
2	3.3592	0.00078157	0.2978	0.5085	3.5536	5.1239
3	3.2983	0.00097260	0.5658	0.8183	3.1876	4.3666
4	3.2544	0.0011	0.7720	1.0969	3.0733	4.0950
5	<b>3.2200</b>	<b>0.0013</b>	<b>0.8947</b>	<b>1.3126</b>	<b>3.0621</b>	<b>4.0230</b>
6	3.1915	0.0014	0.9561	1.4645	3.1012	4.0484
7	3.1673	0.0015	0.9832	1.5714	3.1647	4.1210
8	3.1461	0.0017	0.9940	1.6530	3.2388	4.2143



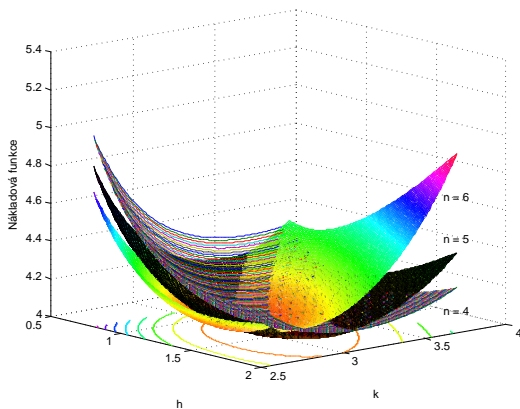
Výsledek získaný pomocí Nelder-Meadovy metody:

- ▶  $L = 4.0121$ ,
- ▶  $n = 4.8054$ ,
- ▶  $h = 1.3863$ ,
- ▶  $k = 3.0571$ .

Výsledek získaný prohledáváním v dvojrozměrné oblasti pro  $h$  a  $k$  s krokem 0.001 při různých volbách  $n = 1, \dots, 25$

- ▶  $L = 4.0133$
- ▶  $n = 5$ ,
- ▶  $h = 1.4072$ ,
- ▶  $k = 3.0822$ .

# Průběh ztrátové funkce v Duncanově modelu pro různé hodnoty $n = 4, 5$ a $6$



# Lorenzen-Vancův model

V roce 1986 T. J. Lorenzen a L. C. Vance uvedli ekonomický model, který v sobě zahrnuje náklady:

- ▶ náklady na vyhledání falešného signálu,
- ▶ náklady na hledání zjištělné příčiny,
- ▶ náklady na opravu procesu,
- ▶ náklady na inspekce (na odběr vzorků).

Dobu mezi odebráním vzorků  $h$  bereme jako parametr, který optimalizujeme.

- ▶  $T_0$  průměrná doba potřebná na vyhledání falešného signálu,
- ▶  $T_1$  a  $T_2$  očekávaná doba na odhalení a opravení zjištělné příčiny.

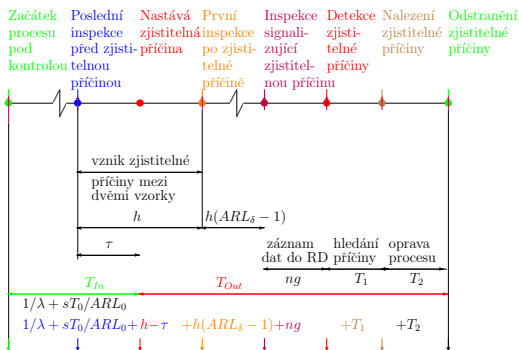
$$E(T_{In}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{(1 - \gamma_1)sT_0}{ARL_0}, \quad (10)$$

- ▶ střední doba do poruchy běžícího procesu, prodlužuje dobu, kdy je proces pod kontrolou o intervaly, ve kterých proces stojí a my detekujeme falešný signál. Parametr  $\gamma_1 = 1$ , pokud proces po dobu detekce běží jinak 0.

$$E(T_{Out}) = -\tau + ng + h(ARL_\delta) + T_1 + T_2. \quad (11)$$

- ▶ nastane zjištělná příčina v procesu, aniž by byla detekována regulačním diagramem. ( $h - \tau$ ), kde  $\tau$  je doba, kdy nastane zjištělná příčina mezi  $i$ -tým a  $(i + 1)$ -ním vzorkem.
- ▶ doba signalizující stav mimo kontrolu  $h(ARL_\delta - 1)$ .
- ▶ doba potřebná na odebrání a zakreslení vzorků do diagramu je  $gn$ .
- ▶ doba k detekování zjištělné příčiny  $T_1$
- ▶ doba k odstranění zjištělné příčiny a opravy procesu  $T_2$ .

# Délka cyklu pro Lorenzen a Vancův model



## Lorenzen Vancův model

Střední ztráta plynoucí z nekvalitní výroby za cyklus je rovna

$$E(C_Q) = \frac{C_I}{\lambda} + C_O \left( -\tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right).$$

Náklady na detekci a opravu zjištěné příčiny zahrnují i náklady na vyšetřování falešného signálu:

$$E(C_D) = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_r.$$

Náklady na odběr vzorků za cyklus vyjádříme jako:

$$E(C_S) = \frac{C_s \left( \frac{1}{\lambda} - \tau + ng + h(ARL_\delta) + \gamma_1 T_1 + \gamma_2 T_2 \right)}{h}.$$

Celkové náklady za jednotku času  $E(L)$  vyjádříme jako:

$$E(L) = \frac{E(C_Q) + E(C_D) + E(C_S)}{E(T)}$$

# Lorenzen Vancův model

**Příklad:** Uvažujme proces řízený Shewhartovým regulačním diagramem  $\bar{X}$  s těmito parametry:

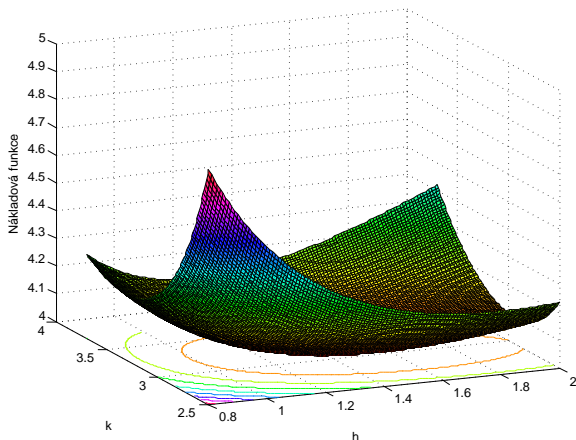
- ▶ zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě  $\delta = 2$ ,
- ▶ pravděpodobnost doby do vzniku poruchy má exponenciální rozdělení s parametrem  $\lambda = 0.01$ ,
- ▶ náklady za hodinu v procesu pod kontrolou jsou  $C_I = 0$  Kč,
- ▶ náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí  $C_O = 100$  Kč,
- ▶ náklady na vyšetření falešného signálu  $C_f = 50$  Kč,
- ▶ náklady na vyhledání zjistitelné příčiny a její odstranění  $C_r = 25$  Kč,
- ▶ variabilní náklady za vzorek  $C_V = 0.10$  Kč,
- ▶ fixní náklady za vzorek  $C_F = 0.50$  Kč,
- ▶ doba mezi odebráním vzorků  $g = 0.05$  hod,
- ▶ dobu k nalezení zjistitelné příčiny  $T_2 = 2$  hod.

Dobu na hledání falešného signálu  $T_0$  a dobu na odhalení zjistitelné příčiny  $T_1$  neuvažujeme.

a) Výsledek pomocí Nelder-Meadovy simplexové metody je nejminimálnější hodnota ztrátové funkce  $L = 4.0116$  pro hodnoty  $n = 4.8020$ ,  $h = 1.3870$ ,  $k = 3.0547$ .

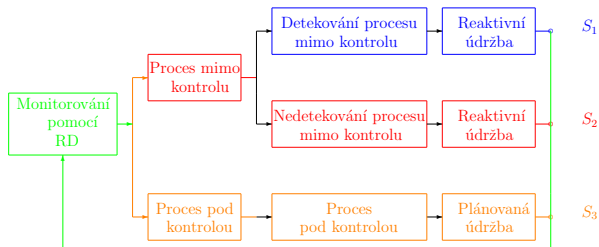
b) Výsledek pomocí prohledávání v dvojrozměrné oblasti pro  $h$  a  $k$  s krokem 0.001 při různých volbách  $n = 1, \dots, 25$ , je minimální hodnota ztrátové funkce  $L = 4.0128$  pro hodnoty  $n = 5$ ,  $h = 1.408$ ,  $k = 3.08$ .

# Průběh ztrátové funkce v Lorenzově-Vancově modelu pro hodnotu $n = 5$ .



# Model s údržbou

Systém řízení procesu a údržby vychází ze tří scénářů. Průběh procesu zaznamenáváme do regulačních diagramů, z kterých zjišťujeme, zda je proces pod statistickou kontrolou nebo mimo statistickou kontrolu. Pokud je ve stavu pod kontrolou, provedeme v plánovaném čase údržbu procesu, která předchází poruše v procesu a reaktivní údržbě. Reaktivní údržbu provádíme tehdy, kdy regulační diagram detekuje proces mimo kontrolu. Po provedení reaktivní nebo plánované údržby se proces vrací do stavu pod statistickou kontrolou.







Hodnota ztrátové funkce:

$$E(L) = E(C)/E(T)$$

Celková průměrná délka cyklu:

$$E(T) = E[T|S_1]P(S_1) + E[T|S_2]P(S_2) + E[T|S_3]P(S_3).$$

Celkové průměrné náklady:

$$E(C) = E[C|S_1]P(S_1) + E[C|S_2]P(S_2) + E[C|S_3]P(S_3).$$

Proces začíná ve stavu pod kontrolou s mechanismem poruchy, které má Weibullovo rozdělení s hustotou  $f(t) = \lambda^\nu \nu t^{\nu-1} e^{-(\lambda t)^\nu}$ , kde  $\lambda, \nu, t \geq 0$  a distribuční funkcí, kterou označíme  $F(t)$ . Pravděpodobnosti jednotlivých scénářů vyjádříme těmito vztahy:

$$\begin{aligned} P[S_1] &= F(mh)P(\text{signál} \mid \text{stav mimo kontrolu}) \\ P[S_2] &= F((m+1)h) - F(mh)P(\text{signál} \mid \text{stav mimo kontrolu}) \\ P[S_3] &= 1 - F((m+1)h) \end{aligned}$$

V době pod kontrolou počítáme s průměrnou dobou do poruchy a počtem zjištěných falešných poplachů, které vyjádříme pomocí useknutého Weibullova rozdělení na intervalu  $\langle 0, (m+1)h \rangle$  s hustotou

$$f^{\text{tr}}(t; m+1) = \frac{\lambda^\nu \nu t^{\nu-1} e^{-(\lambda t)^\nu}}{1 - e^{-(\lambda(m+1)h)^\nu}}, \quad 0 \leq t \leq (m+1)h.$$

Ve scénáři ( $S_1$ ) předpokládáme detekci zjištělné příčiny, která posune proces do stavu mimo kontrolu, po které následuje provedení reaktivní údržby.

Střední dobu cyklu obnovy za předpokladu scénáře ( $S_1$ ), lze vyjádřit jako součet doby pod kontrolou a doby mimo kontrolu:

$$E[T|S_1] = E[T_{in}|S_1] + E[T_{out}|S_1].$$

Vzmemme-li do úvahy možnost zastavení procesu v dobách identifikace falešných poplachů (viz. (10)), dostáváme

$$E[T_{in}|S_1] = \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + (1 - \gamma_A) \frac{sT_0}{ARL_0},$$

kde  $s$  je počet inspekcí, které proběhnou, když je proces pod kontrolou ve scénáři ( $S_1$ ). V době, kdy je proces mimo kontrolu ve scénáři ( $S_1$ ), detekujeme zjištělnou příčinu, kterou vypočítáme následovně:

$$E[T_{out}|S_1] = hARL_\delta - \tau + gn + T_A + T_R,$$

kde  $\tau = \sum_{i=0}^m \int_{ih}^{(i+1)h} (t - ih) f^{Tr}(t; m+1) dt$ . Celkové náklady ze scénáře ( $S_1$ ) jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_1] = E[C_Q|S_1] + E[C_S|S_1] + E[C_D|S_1].$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři ( $S_1$ ) jsou:

$$E[C_Q|S_1] = C_I \int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + C_O \left[ hARL_\delta - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R \right].$$

Náklady na vzorkování ve scénáři ( $S_1$ ) jsou:

$$E[C_S|S_1] = C_S \frac{\int_0^{mh} t f^{Tr}(t; m+1) dt + h(ARL_\delta) - \tau + gn + \gamma_A T_A + \gamma_R T_R}{h}$$

Náklady na hledání falešného poplachu a údržbu jsou:

$$E[C_D|S_1] = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R$$

Ve scénáři ( $S_2$ ) předpokládáme, že zjistitelná příčina není detekována a proces je mimo kontrolu, provádíme reaktivní údržbu. Celková doba ze scénáře ( $S_2$ ), která součtem doby pod kontrolou a dobou mimo kontrolu ze scénáře ( $S_2$ ), je:

$$E[T|S_2] = E[T_{in}|S_2] + E[T_{out}|S_2]$$

$$E[T_{in}|S_2] = \int_0^{(m+1)h} t f \bar{T}_r(t; m+1) dt + (1 - \gamma_A) \frac{sT_0}{ARL_0}$$

$$E[T_{out}|S_2] = (m+1)h - \int_0^{(m+1)h} t f \bar{T}_r(t; m+1) dt + T_R$$

Celkové náklady ze scénáře ( $S_2$ ) jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_2] = E[C_Q|S_2] + E[C_S|S_2] + E[C_D|S_2]$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři ( $S_2$ ) jsou:

$$E[C_Q|S_2] = C_I \int_0^{(m+1)h} t f \bar{T}_r(t; m+1) dt + C_O \left[ (m+1)h - \int_0^{(m+1)h} t f(t) dt + \gamma_R T_R \right]$$

Náklady na vzorkování ve scénáři ( $S_2$ ) jsou:

$$E[C_S|S_2] = mC_s$$

Náklady na hledání falešného poplachu a provedení reaktivní údržby ve scénáři ( $S_2$ ) jsou:

$$E[C_D|S_2] = \frac{sC_f}{ARL_0} + C_R$$

Ve scénáři ( $S_3$ ) předpokládáme stav pod kontrolou, provedeme pouze plánovanou údržbu, která předchází zjiitelné příčině. Dobu potřebnou pro realizaci plánované údržby budeme dále označovat symbolem  $T_P$ . Celková doba ve scénáři ( $S_3$ ) je:

$$E[T|S_3] = (m + 1)h + (1 - \gamma_A) \frac{mT_0}{ARL_0} + T_P$$

Celkové náklady ze scénáře  $S_3$  jsou součtem nákladů ze ztráty kvality, nákladů na vzorkování a nákladů na hledání falešného poplachu a údržbu:

$$E[C|S_3] = E[C_Q|S_3] + E[C_S|S_3] + E[C_D|S_3]$$

Náklady ze ztráty kvality ve scénáři ( $S_3$ ) jsou ( $\gamma_P$  je indikátor běhu procesu v průběhu plánované údržby):

$$E[C_Q|S_3] = C_I[(m + 1)h + \gamma_P T_P]$$

Náklady na vzorkování ve scénáři ( $S_3$ ) jsou:

$$E[C_S|S_3] = mC_S$$

Náklady na plánovanou údržbu ve scénáři ( $S_3$ ) jsou:

$$E[C_D|S_3] = \frac{mC_f}{ARL_0} + C_P$$

**Příklad:** Uvažujme proces řízený Shewhartovým diagramem  $\bar{X}$  s těmito parametry:

- ▶ zjistitelná příčina způsobí posunutí ve střední hodnotě  $\delta = 2$ ,
- ▶ pravděpodobnost doby vzniku do poruchy má weibullovo rozdělení s parametrem měřítka  $\lambda = 0.05$  a tvaru  $\nu = 1$ ,
- ▶ náklady za hodinu v procesu pod kontrolou  $C_I = 0$  Kč,
- ▶ náklady za hodinu v procesu mimo kontrolu činí  $C_O = 100$  Kč,
- ▶ náklady na vyšetření falešného poplachu  $C_f = 5$  Kč,
- ▶ náklady na provedení reaktivní údržby  $C_R = 50$  Kč,
- ▶ náklady na provedení plánované údržby  $C_P = 75$  Kč,
- ▶ variabilní náklady na odebírání vzorku jsou  $C_V = 1$  Kč,
- ▶ fixní náklady za vzorek jsou  $C_F = 5$  Kč,
- ▶ počet vzorků před plánovanou údržbou  $m = 300$ ,
- ▶ doba na odběr a jejich zakreslení do diagramu  $g = 0.05$  hod,
- ▶ doba strávená hledáním falešného signálu  $T_0 = 1$  hod,
- ▶ doba k určení výskytu zjistitelné příčiny  $T_A = 1$  hod,
- ▶ doba k provedení reaktivní údržby  $T_R = 3$ ,
- ▶ dobu k provedení plánované údržby  $T_P = 8$ .

Proces běží během hledání příčiny, reaktivní údržby a plánované údržby stanovíme parametr  $\gamma_A = \gamma_R = \gamma_P = 1$ . Průběh ztrátové funkce pro  $n = 5$  je na následujícím obrázku. Minimální hodnoty  $L = 28.4632$  je dosaženo při  $h = 2.7$  a  $k = 0.7$ .

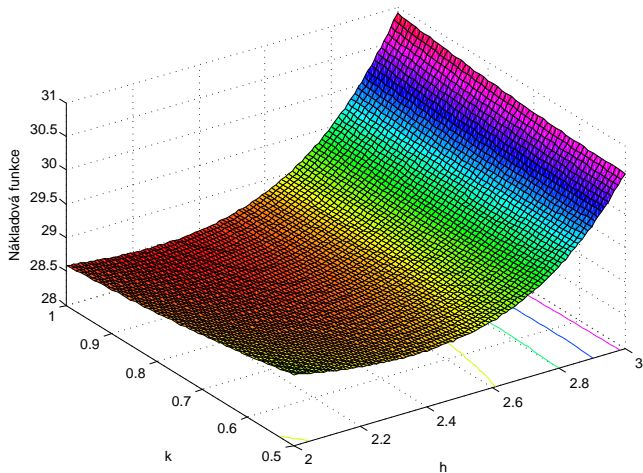


Figure: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře pro hodnotu  $n = 5$ .

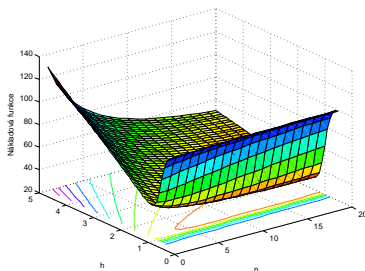


Figure: Průběh ztrátové funkce pro tři scénáře pro hodnotu  $k = 3.024$ .

Samotná ekonomická optimalizace nevede vždy k nejlepším výsledkům. V daném případě by nízká hodnota  $k$  vedla k nepříjemně nízké hodnotě  $ARL_0 = 3.621$ , tedy k velmi častým falešným poplachům.

- ▶ provedeme ekonomicko-statistickou optimalizaci, kde určíme optimální hodnotu  $k_0$  pro požadovanou minimální hodnotu  $ARL_0$ ,
- ▶ provedeme ekonomickou optimalizaci pro tuto optimální hodnotu  $k_0 = 3.024$  pro požadovanou hodnotu  $ARL_0 = 400$ ,
- ▶ výsledkem ekonomické optimalizace je:  $L = 31.3277$ ,  $n = 11$ ,  $h = 2.4$ , výsledná hodnota  $ARL_0 = 400.8716$ .



## Použitá literatura:

- ▶ Cézová, E. (2008) *Ekonomicko-statistický návrh regulačního diagramu*, Request 08, CQR VUT Brno
- ▶ Duncan, A. J. (1956), *The economic design of X-charts used to maintain current control of a process*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 51, No. 274, pp. 228-242
- ▶ Linderman K., Anderson J. C., McKone-Sweet K.E. (2005), *An integrated systems approach to process control and maintenance*. European Journal of Operational Research 164, pp. 324 - 340
- ▶ Lorenzen, T. J. and Vance, L.C. (1986), *The economic design of control charts: a unified approach*. Technometrics 28, pp. 3-10
- ▶ McWilliams P. T., (1994), *Economic, statistical and economic-statistical X chart designs*. Journal of Quality Technology, vol. 26, No.3, pp. 227-238

Děkuji za pozornost.