Asymptotická ekvivalence statistik spojitých difúzních procesů pro náhodné časy

D. Stibůrek

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Univerzita Karlova v Praze

Robust 2012
9. – 14. září 2012, Němčičky

Motivace

- Máme (standardně řešitelný) difúzní proces

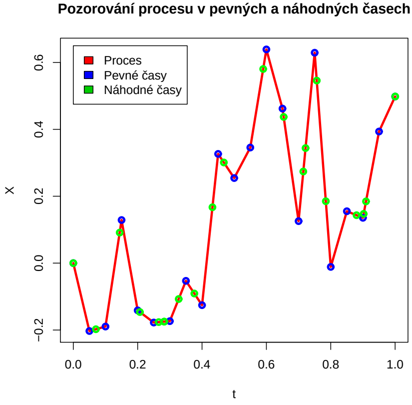
$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

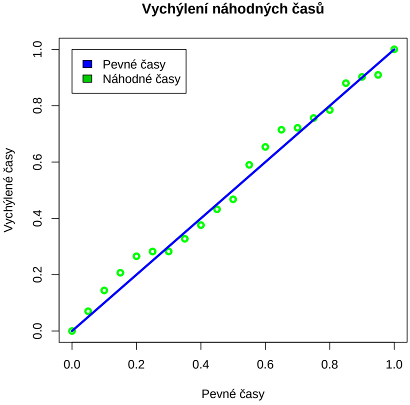
kde W je Wienerův proces na $[0, 1]$.

- Chceme-li něco říci o parametrických funkcích b a σ, potřebujeme tento proces pozorovat v diskrétních časech, které nejčastěji volíme $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. Pro tyto časy bylo odvozeno mnoho výsledků.

- Hlavní otázka — mohou tyto výsledky zůstat v platnosti pro pozorování tohoto procesu v nějakých náhodných časech?

Ilustrace


Pozorování procesu v pevných a náhodných časech
Proces
Pevné časy
Náhodné časy
X
t
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Vychýlení náhodných časů
Pevné časy
Náhodné časy
Vychýlené časy
Pevné časy
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Předpoklady

- Předpoklad na pozorované časy

$$t_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(n)}, \quad \xi_j^{(n)} \overset{\text{nez.}}{\sim} (1/n + O_+(1/n), O_+(1/n)), \tag{2}$$

kde $nO_+(1/n) \to 0$ **monotónně**. Např. $O_+(1/n) = \frac{1}{n\ln(n+1)}$.

- Realizace procesu (1)

$$X_{t_1^{(n)}}, X_{t_2^{(n)}}, \ldots, X_{t_n^{(n)}}. \tag{3}$$

Výsledek

Věta

Za výše uvedených předpokladů buď X nekonstantní proces s ***konečnou kvadratickou variací*** *vůči* ***stejnoměrně spojité*** *statistice S a nechť platí*

$$S\left(X_{\frac{1}{n}}, X_{\frac{2}{n}}, \dots, X_1\right) \xrightarrow{D} B, \quad n \to \infty, \tag{4}$$

kde B je nějaké rozdělení. Potom

$$S\left(X_{t_1^{(n)}}, X_{t_2^{(n)}}, \dots, X_{t_n^{(n)}}\right) \xrightarrow{D} B, \quad n \to \infty. \tag{5}$$

Příklad statistik

Statistiky, na které můžeme aplikovat tuto větu:

$$S_1 = \sum_{k=2}^{n} \left(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}} \right)^2, \tag{6}$$

$$S_2 = \sqrt{n} \left\{ \frac{n}{3} \sum_{k=2}^{n} \left(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}} \right)^4 - \left(\sum_{k=2}^{n} \left(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{k-1}{n}} \right)^2 \right)^2 \right\}. \tag{7}$$

Pro případ **konstantní volatility** $S_1 \xrightarrow{P} \sigma^2$, $S_2 \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0, \frac{8}{3}\sigma^8)$, pro $n \to \infty$.

Shrnutí

- Požadavek na proces a používanou statistiku bývá obvykle splněn.
- Při malé variabilitě uvažovaných časů jsou zachovány asymptotické výsledky.
- Bývá splněno pro většinu klasických rozdělení přírůstků (rovnoměrné, exponenciální, chí-kvadrát,...) splňující základní předpoklady.
- Podrobnější odvození a další motivace viz poster.