Asymptotická ekvivalence statistik spojitých difúzních procesů pro náhodné časy

DAVID STIBŮREK

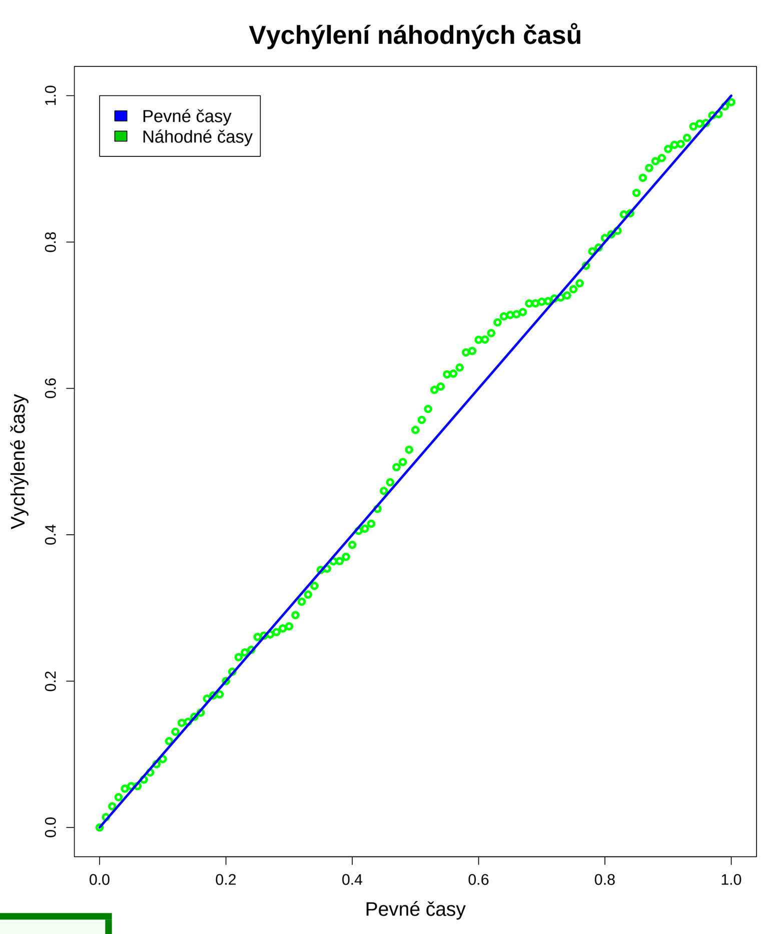
stiburek@karlin.mff.cuni.cz
Katedra pravděpodobnosti a matematické, Univerzita Karlova v Praze

ABSTRAKT

Při statistické analýze spojitých difúzních procesů dostáváme mnohdy asymptotické výsledky pro pozorování v deterministických časech s volbou $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ na intervalu $[0,1]$. Tyto časy však mohou být při praktickém pozorování vychýleny. V této práci přijmeme předpoklad, že je daný proces pozorován v náhodných časech $t_k^{(n)} := \sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(n)}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad n \in N$, kde $\xi_j^{(n)}$ jsou nezávislé na procesu, mezi sebou a jsou se středními hodnotami $1/n$ plus ohraničeně asymptoticky menším vychýlením a s rozptyly s ohraničeným řádem menším než $1/n$. Potom jsou při dostatečné konečné variaci procesu asymptotické výsledky zachovány.

NÁHODNÉ ČASY MĚŘENÍ

Difuzní procesy často pozorujeme na omezeném intervalu $[0,1]$ v deterministických časech, které obvykle volíme $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. Jsou-li tyto časy z menší části vychýleny, nezávisle na daném procesu a je-li každý příspěvek nového vychýlení nezávislý na příspěvku předešlého, mohli bychom očekávat, že výsledky zůstanou podobné. Přesněji nechť tento proces pozorujeme v náhodných časech



$$t_k^{(n)} := \sum_{j=1}^{k} \xi_j^{(n)}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathrm{N},$$

kde $\xi_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, n$, $n \in \mathrm{N}$ jsou nezávislé mezi sebou i na pozorovaném procesu. Přijmeme-li předpoklad, že tyto přírůstky "nemají velkou variabilitu", pak bychom mohli očekávat, že tyto pozorované časy se celkově příliš neliší od svých deterministických protějšků, resp. od přímky, kterou tvoří.

PŘEDPOKLADY A POUŽITÉ VĚTY

Nechť $\xi_j^{(n)} \sim (1/n + O_+(1/n), O_+(1/n))$, $j = 1, \ldots, n$, $n \in \mathrm{N}$, kde $nO_+(1/n) \to 0$ **monotónně**. Např. $O_+(1/n) = \frac{1}{n \ln(n+1)}$. Naším cílem bude ukázat, že rozdíly náhodných časů $t_k^{(n)}$ od svých deterministických protějšků $\frac{k}{n}$ konvergují stejnoměrně v pravděpodobnosti k nule s rostoucím počtem pozorování, tj., že pro každé $\epsilon > 0$ platí

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \le k \le n} \left|t_k^{(n)} - k/n\right| > \epsilon\right) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

Jak známo $\left(t_k^{(n)} - k/n, k \in \{1, 2, \ldots, n\}\right)$ je pro každé n submartingal (supermartingal) — součet nezávislých náhodných veličin s nezápornou (nekladnou) střední hodnotou. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že se jedná o submartingal. Podle submartingalové maximální nerovnosti (viz. [3] věta 3.5) dostáváme

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \le k \le n} \left|t_k^{(n)} - k/n\right| > \epsilon\right) \le \frac{2\mathrm{E}\left(t_n^{(n)} - 1\right)^+ - \mathrm{E}\left(t_1^{(n)} - \frac{1}{n}\right)}{\epsilon}.$$

Problém se tak redukuje na L1-konvergenci závěrečného součtu, která je ekvivalentní její konvergenci v pravděpodobnosti a stejnoměrné integrovatelnosti. Konvergenci v pravděpodobnosti i stejnoměrnou integrovatelnost dostaneme z předpokladů o přírůstcích $\xi_k^{(n)}$. Protože uvažujeme spojitý proces na kompaktní množině, pak stačí uvažovat aby tento proces měl dostatečně konečnou variaci a abychom použili rozumnou statistiku. Užijeme-li větu o spojitém zobrazení (viz. [1] věta 2.7) a Cramér Sluckého větu, pak můžeme zformulovat tento výsledek.

Věta 1. *Za výše uvedených předpokladů buď X nekonstantní proces s* ***konečnou kvadratickou variací*** *vůči* ***stejnoměrně spojité*** *statistice S a nechť platí*

$$S\left(X_{\frac{1}{n}}, X_{\frac{2}{n}}, \ldots, X_1\right) \xrightarrow{D} B, \quad n \to \infty, \tag{1}$$

kde B je nějaké rozdělení. Potom

$$S\left(X_{t_1^{(n)}}, X_{t_2^{(n)}}, \ldots, X_{t_n^{(n)}}\right) \xrightarrow{D} B, \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Příklady těchto statistik mohou být v [2] ve větě 3.6. Zmiňme také, že v případě symetrie pozorovaných náhodných časů kolem svých středních hodnot jde oslabit předpoklad o jejich rozptylech na jejich první momenty. Podle Lévyho maximální nerovnosti (viz. [3] věta 3.4) stačí totiž ověřit konvergenci v pravděpodobnosti posledního pozorovaného času.

BUDOUCÍ MOTIVACE

Tato práce řeší situaci, kdy můžeme zachovat asymptotické výsledky při vychýlení časů s nezávislými přírůstky od svých deterministických středních hodnot. Otázka pro vyšší rozptyl, či nemonotónní střední hodnoty přírůstků však zůstává nedořešena.

Poděkování. Rád bych poděkoval svému školiteli docentu Danielu Hlubinkovi za užitečné rady, nápady a ochotu pomoci s řešením nedostatků.
Tento výstup vznikl v rámci projektu Specifického vysokoškolského výzkumu 265 315.

Literatura.

[1] Billingsley P. (1999). *Convergence of Probability Measures.* NY: John Wiley & Sons, Inc., New York.

[2] Dette H. a Podolskij M. (2008). *Testing the parametric form of the volatility in continuous time diffusion models—an empirical process approach.* Journal of Econometrics. Inference **143**, 56 – 73.

[3] Lachout P. (2007). *Teorie pravděpodobnosti 2* (in Czech). MFF UK, Praha.