Konzistencia hĺbky funkcií II

Stanislav Nagy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Univerzita Karlova v Praze

KU Leuven
Dept. of Mathematics

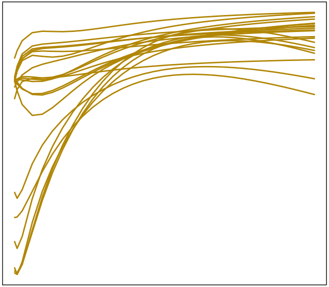
Robust 2014

This work was supported by Research Foundation – Flanders (FWO-Vlaanderen)

Funkcionálne dáta

$X \sim \mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1]))$ a náhodný výber $X_1, \dots, X_n$ z P. Uvažujme hĺbku funkcií náhodného výberu voči P (resp. P_n)

$$D : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1])) \to [0,1].$$



Hĺbky pre funkcie

Tri základné typy hĺbok pre funkcie:

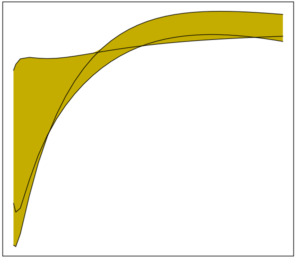
- **Pásové hĺbky** (López-Pintado, Romo (2009))
- **Integrálne hĺbky** (Fraiman, Muniz (2001))
- **Infimálne hĺbky** (Mosler, Polyakova (2013))

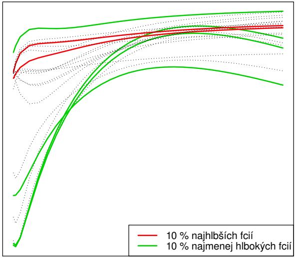
Pásové hĺbky

López-Pintado, Romo (2009): pre $J = 2, 3, \ldots$

$$BD^{J)}(x; \mathrm{P}) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=2}^{J} \mathrm{P}\left(G(x) \subset B\left(X_1, X_2, \ldots, X_j\right)\right),$$

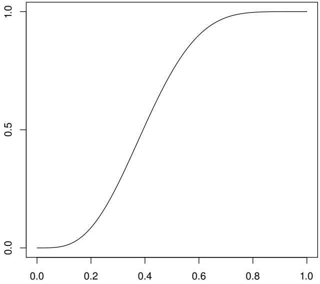
kde $G(x)$ je **graf funkcie** x a $B(x_1, x_2, \ldots, x_j)$ je **pás funkcií**

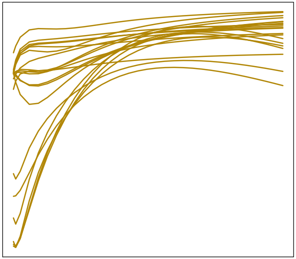




Integrálne hĺbky

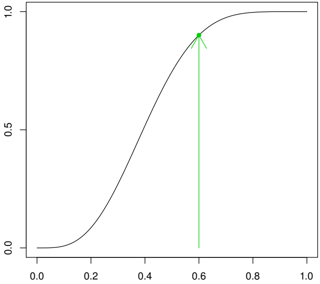
$$D_1(u;Q) = 1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_Q(u)\right|$$

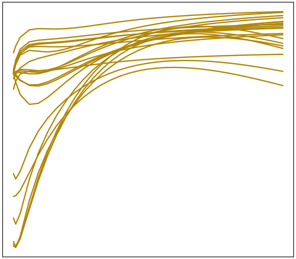




Integrálne hĺbky

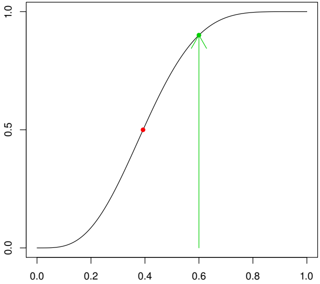
$$D_1(u;Q) = 1 - |0.5 - \mathrm{F}_Q(u)|$$

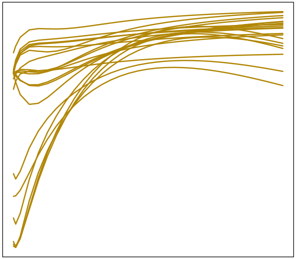




Integrálne hĺbky

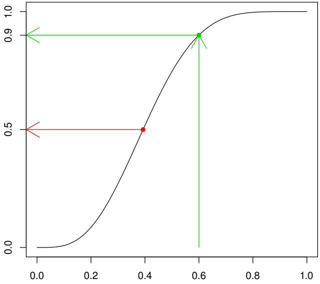
$$D_1(u;Q) = 1 - |0.5 - \mathrm{F}_Q(u)|$$

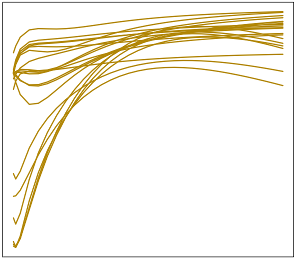




Integrálne hĺbky

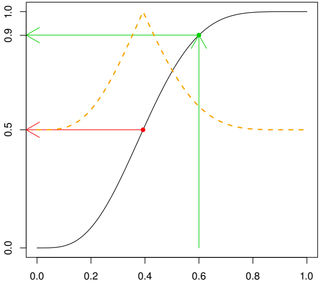
$$D_1\left(u;Q\right) = 1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_Q\left(u\right)\right|$$

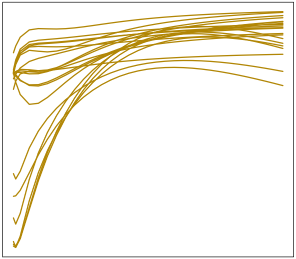




Integrálne hĺbky

$$D_1(u;Q) = 1 - |0.5 - \mathrm{F}_Q(u)|$$

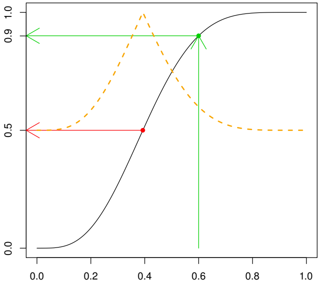


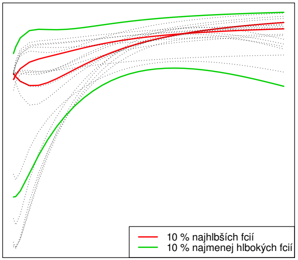


Integrálne hĺbky

Fraiman, Muniz (2001):

$$D_{FM}\left(x;\mathrm{P}\right)=\int_0^1 D_1\left(x(t);\mathrm{P}_t\right)\mathrm{d}t.$$

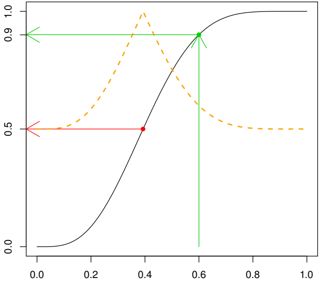


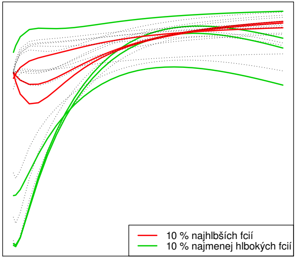


Infimálne hĺbky

Mosler, Polyakova (2013):

$$D_{MP}\left(x;\mathrm{P}\right)=\inf_{t\in[0,1]} D_1\left(x\left(t\right);\mathrm{P}_t\right).$$





Slabá a silná konzistencia

Hĺbka D je na množine $S \subset \mathcal{C}([0,1])$ **konzistentná**

- **slabo rovnomerne** ak

$$\sup_{x \in S} \left| D(x; \mathrm{P}_n) - D(x; \mathrm{P}) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} 0,$$

- **slabo univerzálne** ak

$$\sup_{x \in S} \left| D(x; \mathrm{P}_n) - D(x; \mathrm{P}) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{\mathrm{P}} 0 \text{ pre každé } \mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1])).$$

Slabá a silná konzistencia

Hĺbka D je na množine $S \subset \mathcal{C}([0,1])$ **konzistentná**

- **rovnomerne** ak

$$\sup_{x \in S} |D(x; \mathrm{P}_n) - D(x; \mathrm{P})| \xrightarrow[n \to \infty]{\text{s.i.}} 0,$$

- **univerzálne** ak

$$\sup_{x \in S} |D(x; \mathrm{P}_n) - D(x; \mathrm{P})| \xrightarrow[n \to \infty]{\text{s.i.}} 0 \text{ pre každé } \mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1])).$$

Konzistencia integrálnych hĺbok

Fraiman, Muniz (2001), Theorem 3.1:

Tvrdenie:

Nech pre $X \sim \mathrm{P}$ platia nasledujúce podmienky:

- *existuje $L > 0$ tak, že trajektórie procesu X sú skoro iste L-Lipschitzovské,*
- *existuje $C > 0$ tak, že pre každú $u \in \mathcal{C}([0,1])$ L-Lipschitzovskú a každé $\varepsilon > 0$ platí*

$$\mathrm{E}\left[\lambda\left(\{t \in [0,1] : X(t) \in [u(t); u(t) + C\varepsilon]\}\right)\right] < \varepsilon/2.$$

Potom D_{FM} je rovnomerne konzistentná voči P na množine L-Lipschitzovských funkcií.

Konzistencia integrálnych hĺbok: Dôkaz

Dôkaz: Fraiman a Munizová dokazujú rovnomernú konzistenciu

$$\sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \left| \int_0^1 \mathrm{F}_{n,t}(x(t)) - \mathrm{F}_t(x(t))\, \mathrm{d}t \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.i.}} 0,$$

z čoho **okamžite plynie**

$$\sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \left| D_{FM}(x; \mathrm{P}_n) - D_{FM}(x; \mathrm{P}) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.i.}} 0.$$

□

Dokazovanie konzistencie

Opakovane budeme používať pre $u \in \mathbb{R}$ a $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ vzťah

$$\begin{aligned} \left|D_1(u;Q) - D_1(u;Q_n)\right| &= \left|1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_Q(u)\right| - \left(1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_{Q_n}(u)\right|\right)\right| \\ &\leq \left|\mathrm{F}_Q(u) - \mathrm{F}_{Q_n}(u)\right|. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Silná konzistencia hĺbky

Rozpíšme pomocou ($*$)

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \left| D_{FM}(x; \mathrm{P}) - D_{FM}(x; \mathrm{P}_n) \right| &= \sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \left| \int_0^1 D_1(x(t); \mathrm{P}_t) - D_1(x(t); \mathrm{P}_{n,t}) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \int_0^1 \left| D_1(x(t); \mathrm{P}_t) - D_1(x(t); \mathrm{P}_{n,t}) \right| \mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{x \in \mathrm{Lip}_L} \int_0^1 \left| \mathrm{F}_{n,t}(x(t)) - \mathrm{F}_t(x(t)) \right| \mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

Silná konzistencia hĺbky

Rozpíšme pomocou $(*)$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathrm{Lip}_L} \left|D_{FM}(x;\mathrm{P}) - D_{FM}(x;\mathrm{P}_n)\right| &= \sup_{x\in\mathrm{Lip}_L} \left|\int_0^1 D_1(x(t);\mathrm{P}_t) - D_1(x(t);\mathrm{P}_{n,t})\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \sup_{x\in\mathrm{Lip}_L} \int_0^1 \left|D_1(x(t);\mathrm{P}_t) - D_1(x(t);\mathrm{P}_{n,t})\right|\mathrm{d}t \\ &\leq \sup_{x\in\mathrm{Lip}_L} \int_0^1 \left|\mathrm{F}_{n,t}(x(t)) - \mathrm{F}_t(x(t))\right|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

my ale máme iba

$$\sup_{x\in\mathrm{Lip}_L} \left|\int_0^1 \mathrm{F}_{n,t}(x(t)) - \mathrm{F}_t(x(t))\,\mathrm{d}t\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.i.}} 0.$$

Slabá konzistencia hĺbky

Podobne vďaka (∗) a Fubiniho vete (merateľnosť Nagy et al. (2013))

$$\mathrm{E}\left[\sup_{x\in\mathcal{C}([0,1])}\left|D_{FM}(x;\mathrm{P})-D_{FM}(x;\mathrm{P}_n)\right|\right]\leq\int_0^1\mathrm{E}\left[\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{F}_{n,t}(u)-\mathrm{F}_t(u)\right|\right]\mathrm{d}t,$$

integrand konverguje pre každé t skoro iste k 0 (Glivenko-Cantelli) a D_{FM} je **slabo univerzálne konzistentná**.

Slabá konzistencia hĺbky

Podobne vďaka ($*$) a Fubiniho vete (merateľnosť Nagy et al. (2013))

$$\mathrm{E}\left[\sup_{x\in\mathcal{C}([0,1])}\left|D_{FM}\left(x;\mathrm{P}\right)-D_{FM}\left(x;\mathrm{P}_n\right)\right|\right]\leq\int_0^1\mathrm{E}\left[\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{F}_{n,t}\left(u\right)-\mathrm{F}_t\left(u\right)\right|\right]\mathrm{d}t,$$

integrand konverguje pre každé t skoro iste k 0 (Glivenko-Cantelli) a D_{FM} je **slabo univerzálne konzistentná**.

Platí niečo podobné aj **v silnom zmysle?**

Konvergencia náhodných procesov

Majme postupnosť náhodných procesov

$$X_n = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{n,t}(u) - \mathrm{F}_t(u) \right| : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Vieme, že $X_n(.,t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_t-\text{s.i.}} 0$ pre každé $t \in [0,1]$, t.j.

$$X_n(\omega,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \omega \notin N_t, \mathrm{P}(N_t) = 0.$$

Konvergencia náhodných procesov

Majme postupnosť náhodných procesov

$$X_n = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{n,t}(u) - \mathrm{F}_t(u) \right| : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Vieme, že $X_n(.,t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_t-\mathrm{s.i.}} 0$ pre každé $t \in [0,1]$, t.j.

$$X_n(\omega,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \omega \notin N_t, \mathrm{P}(N_t) = 0.$$

Znamená to $X_n(.,t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}-\mathrm{s.i.}} 0$ pre každé $t \in [0,1]$? T.j. platí

$$X_n(\omega,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } t \in [0,1] \text{ a } \omega \notin N, \mathrm{P}(N) = 0?$$

Konvergencia náhodných procesov

Majme postupnosť náhodných procesov

$$X_n = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{n,t}(u) - \mathrm{F}_t(u) \right| : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}.$$

Vieme, že $X_n(.,t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_t-\text{s.i.}} 0$ pre každé $t \in [0,1]$, t.j.

$$X_n(\omega,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \omega \notin N_t, \mathrm{P}(N_t) = 0.$$

Znamená to $X_n(.,t) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}-\text{s.i.}} 0$ pre každé $t \in [0,1]$? T.j. platí

$$X_n(\omega,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } t \in [0,1] \text{ a } \omega \notin N, \mathrm{P}(N) = 0?$$

Zrejme $N \subset \bigcup_{t\in[0,1]} N_t$, z toho ale stále **nevieme ukázať** $\mathrm{P}(N) = 0$!

Konzistentná verzia procesu

Pre každý proces X_n definujme $\tilde{X}_n$ ako

$$\tilde{X}_n(\omega, t) = \begin{cases} X_n(\omega, t) & \text{pre } \omega \notin N_t, \\ 0 & \text{pre } \omega \in N_t. \end{cases}$$

Potom $\mathrm{P}\left(X_n(., t) = \tilde{X}_n(., t)\right) = 1$ pre každé $t \in [0, 1]$, teda $\tilde{X}_n$ **je verziou procesu** X_n (Gikhman, Skorokhod [2]) takou, že

$$\tilde{X}_n(\omega, t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ pre každé } \omega \in \Omega \text{ a } t \in [0, 1].$$

Zrejme teda

$$\int_0^1 \tilde{X}_n(\omega, t) \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \text{ pre každé } \omega \in \Omega.$$

Stochastická ekvivalencia verzií

Teraz môžeme pre každú P-merateľnú množinu $B \subset \Omega$ písať

$$\int_B \int_0^1 X_n(\omega, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega) = \int_0^1 \int_B X_n(\omega, t)\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \int_B \tilde{X}_n(\omega, t)\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_B \int_0^1 \tilde{X}_n(\omega, t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega),$$

teda

$$\int_0^1 X_n(.,t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{E}\left[\int_0^1 X_n(.,t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}\right] = \int_0^1 \tilde{X}_n(.,t)\,\mathrm{d}t$$

kde posledná rovnosť platí P-skoro iste.

Stochastická ekvivalencia verzií

Teraz môžeme pre každú P-merateľnú množinu $B \subset \Omega$ písať

$$\int_B \int_0^1 X_n(\omega,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega) = \int_0^1 \int_B X_n(\omega,t)\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \int_B \tilde{X}_n(\omega,t)\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_B \int_0^1 \tilde{X}_n(\omega,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mathrm{P}(\omega),$$

teda

$$\int_0^1 X_n(.,t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{E}\left[\int_0^1 X_n(.,t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}\right] = \int_0^1 \tilde{X}_n(.,t)\,\mathrm{d}t$$

kde posledná rovnosť platí P-skoro iste. Dostávame

$$\int_0^1 X_n(\omega,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre } \mathrm{P}\text{-skoro všetky } \omega \in \Omega.$$

Konzistencia integrálnych hĺbok 2

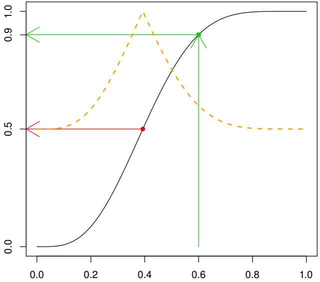
Tvrdenie:

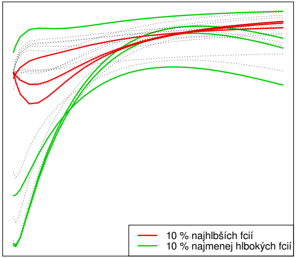
D_{FM} je univerzálne konzistentná hĺbka na celom priestore $\mathcal{C}([0,1])$.

Infimálne hĺbky

Mosler, Polyakova (2013):

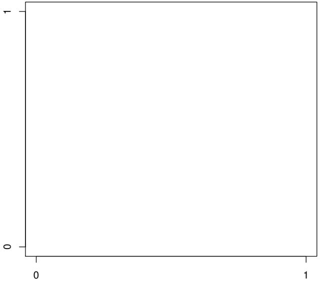
$$D_{MP}\left(x;\mathrm{P}\right) = \inf_{t\in[0,1]} D_1\left(x\left(t\right);\mathrm{P}_t\right).$$





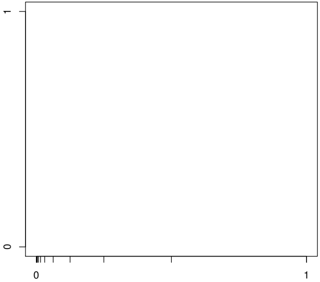
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Rozdeľme interval $[0, 1]$ pomocou postupnosti $u_j = 2^{-j}$, $j = 0, 1, \ldots$.



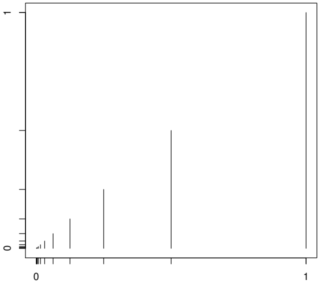
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Rozdeľme interval $[0, 1]$ pomocou postupnosti $u_j = 2^{-j}, j = 0, 1, \ldots$.



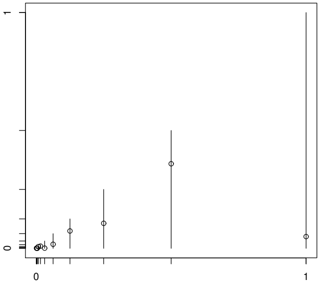
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Definujme $X(u_j) \sim \mathrm{Unif}\left(\left[0, 2^{-j}\right]\right)$ **nezávisle od seba** pre každé j a $X(0) = 0$.



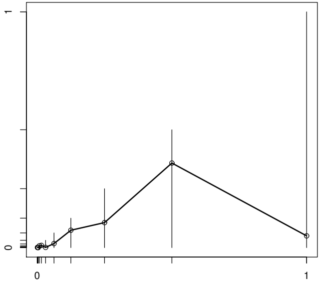
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Definujme $X(u_j) \sim \mathrm{Unif}\left(\left[0, 2^{-j}\right]\right)$ **nezávisle od seba** pre každé j a $X(0) = 0$.



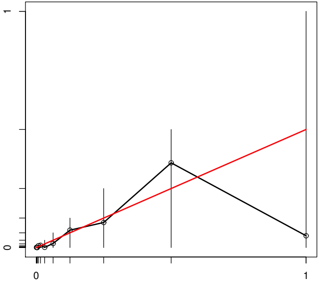
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Dodefinujme X **lineárne**, $X \sim \mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1]))$.



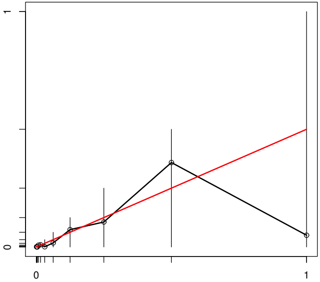
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Počítajme hĺbku funkcie $x(t) = t/2$.



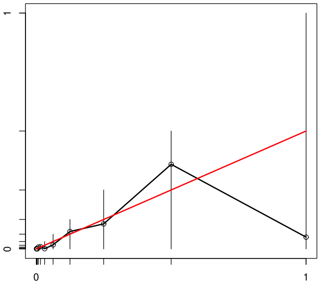
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

$$\inf_{t\in(0,1]} 1-\left|0.5-\mathrm{F}_t(x(t))\right| \geq 0.75$$



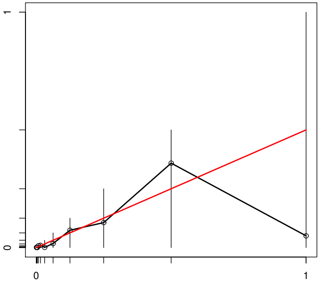
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

$$\inf_{t\in(0,1]} 1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_{n,t}(x(t))\right| = 0.5$$



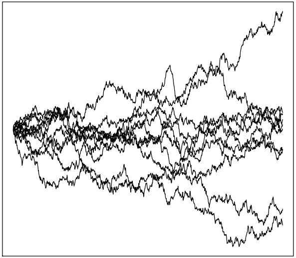
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 1

Infimálna hĺbka nie je slabo univerzálne konzistentná.



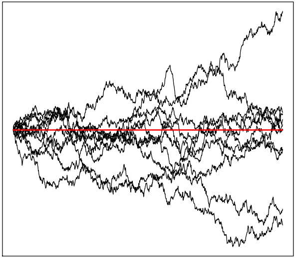
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 2

Uvažujme náhodný výber **Wienerovych procesov** na $[0, 1]$.



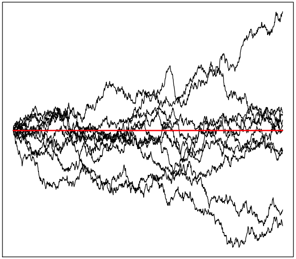
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 2

Počítajme hĺbku funkcie $x(t) \equiv 0$.



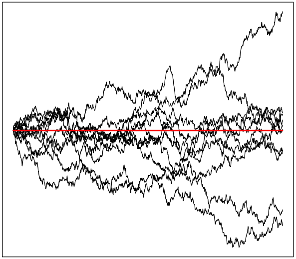
Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 2

$$\inf_{t \in (0,1]} 1 - \left|0.5 - \mathrm{F}_t(x(t))\right| = 1$$



Konzistencia infimálnych hĺbok: Príklad 2

$$\inf_{t \in (0,1]} 1 - \left| 0.5 - \mathrm{F}_{n,t}(x(t)) \right| = 0.5$$



Konzistencia infimálnej hĺbky

Použime opäť $(*)$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \mathcal{C}([0,1])} \left| \inf_{t \in [0,1]} D_1\left(x(t); \mathrm{P}_t\right) - \inf_{t \in [0,1]} D_1\left(x(t); \mathrm{P}_{n,t}\right) \right| \\
\leq \sup_{x \in \mathcal{C}([0,1])} \sup_{t \in [0,1]} \left| D_1\left(x(t); \mathrm{P}_t\right) - D_1\left(x(t); \mathrm{P}_{n,t}\right) \right| \\
\leq \sup_{t \in [0,1], x \in \mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{n,t}(x) - \mathrm{F}_t(x) \right|
\end{aligned}$$

Konzistencia infimálnej hĺbky

Použime opäť $(*)$:

$$\sup_{x\in\mathcal{C}([0,1])}\left|\inf_{t\in[0,1]} D_1\left(x(t);\mathrm{P}_t\right)-\inf_{t\in[0,1]} D_1\left(x(t);\mathrm{P}_{n,t}\right)\right|$$
$$\leq \sup_{x\in\mathcal{C}([0,1])}\sup_{t\in[0,1]}\left|D_1\left(x(t);\mathrm{P}_t\right)-D_1\left(x(t);\mathrm{P}_{n,t}\right)\right|$$
$$\leq \sup_{t\in[0,1],x\in\mathbb{R}}\left|\mathrm{F}_{n,t}(x)-\mathrm{F}_t(x)\right|$$

Potrebujeme **rovnomerne obmedziť nespočetnú kolekciu ecdf procesov**.

Rovnomerné Glivenkove-Cantelliho vety?

Kolekcia ecdf procesov je **rovnomerne GC** (napr. [6, Kapitola 2.8]), t.j.

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathrm{P}\left(\sup_{m\geq n}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{F}_{m,t}(x)-\mathrm{F}_t(x)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \varepsilon > 0.$$

Rovnomerné Glivenkove-Cantelliho vety?

Kolekcia ecdf procesov je **rovnomerne GC** (napr. [6, Kapitola 2.8]), t.j.

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathrm{P}\left(\sup_{m\geq n}\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{F}_{m,t}(x)-\mathrm{F}_t(x)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \varepsilon > 0.$$

My ale potrebujeme **oveľa silnejší výsledok**

$$\mathrm{P}\left(\sup_{m\geq n}\sup_{t\in[0,1],x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{F}_{m,t}(x)-\mathrm{F}_t(x)\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \varepsilon > 0.$$

Rovnomerné Glivenkove-Cantelliho vety?

Kolekcia ecdf procesov je **rovnomerne GC** (napr. [6, Kapitola 2.8]), t.j.

$$\sup_{t\in[0,1]} \mathrm{P}\left(\sup_{m\geq n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{m,t}(x) - \mathrm{F}_t(x) \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \varepsilon > 0.$$

My ale potrebujeme **oveľa silnejší výsledok**

$$\mathrm{P}\left(\sup_{m\geq n} \sup_{t\in[0,1],x\in\mathbb{R}} \left| \mathrm{F}_{m,t}(x) - \mathrm{F}_t(x) \right| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pre každé } \varepsilon > 0.$$

Vieme toto dokázať?

Uniformná Glivenkova-Cantelliho vlastnosť ecdf procesu

Tvrdenie:

Nech $X \sim \mathrm{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}([0,1]))$ *je zmesou* $\mathrm{P}^{(1)}$ *a* $\mathrm{P}^{(2)}$ *takých, že:*

1. *Trajektórie* $X_1 \sim \mathrm{P}^{(1)}$ *skoro iste ležia v rovnako spojitej množine funkcií a existuje* $K > 0$ *tak že pre všetky* $t \in [0,1]$ *je* $X_1(t) \sim \mathrm{P}_t^{(1)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ *abs. spojité s hustotou obmedzenou* K.
2. $X_2 \sim \mathrm{P}^{(2)}$ *je koncentrovaná v konečnorozmernom podpriestore* $\mathcal{C}([0,1])$.

Potom

$$\sup_{t\in[0,1],x\in\mathbb{R}} \left|\mathrm{F}_{n,t}(x) - \mathrm{F}_t(x)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{\text{s.i.}} 0.$$

Konzistencia infimálnych hĺbok

Tvrdenie:

Ak P je rozdelenie ako v predchádzajúcom, potom je D_{MP} rovnomerne konzistentná hĺbka voči P na celom priestore $\mathcal{C}([0,1])$.

Záver

Ukázali sme, že:

- **integrálne hĺbky** sú **vždy silne univerzálne konzistentné**, ale
- **infimálne hĺbky** sú konzistentné **iba za istých predpokladov**.

Záver

Ukázali sme, že:

- **integrálne hĺbky** sú **vždy silne univerzálne konzistentné**, ale
- **infimálne hĺbky** sú konzistentné **iba za istých predpokladov**.

Do budúcnosti:

- Charakterizácia funkcionálov **stochasticky ekvivalentných s každou verziou náh. procesu**.
- Funkcionálne **uniformné Glivenkove-Cantelliho vety**.

Literatúra

- Ricardo Fraiman and Graciela Muniz. Trimmed means for functional data. *Test*, 10(2):419–440, 2001.
- I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod. *Introduction to the theory of random processes*. Translated from the Russian by Scripta Technica, Inc. W. B. Saunders Co., Philadelphia, Pa., 1969.
- Sara López-Pintado and Juan Romo. On the concept of depth for functional data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 104(486):718–734, 2009.
- Karl Mosler and Yulia Polyakova. General notions of depth for functional data. *arXiv preprint arXiv:1208.1981*, 2013.
- Stanislav Nagy, Marek Omelka, and Daniel Hlubinka. Integrated data depth for vector valued functions. Submitted, 2013.
- Aad W. van der Vaart and Jon A. Wellner. *Weak convergence and empirical processes*. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1996.