Bodové procesy úseček a odhady jejich charakteristik

Markéta Zikmundová

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzta Karlova v Praze

20.ledna 2014

Základní definice a značení

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$... pravděpodobnostní prostor, E polský prostor.
$\mathcal{N}$... množina lokálně konečných celočíselných měr na $(E, \mathcal{B}(E))$ se $\sigma-$algebrou $\mathbf{N}$.
Bodový proces je pak zobrazení

$$\mu : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathbf{N})$$

Pro $B \in \mathcal{B}(E)$ je $\mu(B)$ počet bodů procesu μ v B.
Označme η Poissonův bodový proces s mírou intenzity $\lambda(B) = \mathbb{E}\eta(B),\ B \in \mathcal{B}(E)$.
Potom proces μ s hustotou p vzhledem k η má rozdělení

$$P_\mu(A) = \int_A p(x) P_\eta(\mathrm{d}\mathbf{x}) \qquad A \in \mathbf{N}.$$

Proces úseček

Každá úsečka v $\mathbb{R}^2$ je jednoznačně určena svým význačným bodem (střed úsečky, lexikografické minimum,..), délkou a směrem.

Bodovým procesem úseček pak rozumíme bodový proces na $E = S \times (0, \infty) \times [0, \pi)$, kde $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ kompaktní.
Označme η Poissonovův bodový proces úseček na $S \times (0, \infty) \times [0, \pi)$ s mírou intenzity $\rho(z)dz\vartheta(d\phi)D(dr)$, kde

- $\rho(z)$ je intenzita procesu význačných bodů (omezená na S)
- $D(dl)$ rozdělení délek
- $\vartheta(d\phi)$ rozdělení směrů

Proces interaktivních úseček

Uvažujme bodový proces úseček μ daný hustotou p vzhledem k Poissonovu procesu η,

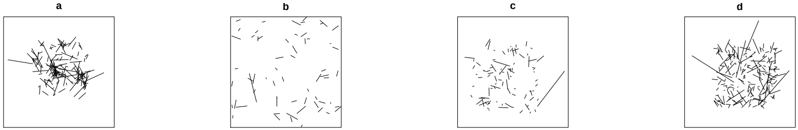
$$p(\mu|\theta) = c_\theta^{-1} \exp(\theta \cdot T(U_\mu)), \tag{1}$$

kde U_μ je sjednocení úseček procesu.
Příklad.($n = 3$.)

$$T(U_\mu) = (N(U_\mu), L(U_\mu), I(U_\mu)),$$

kde

N... počet průsečíků
L... celková délka U_μ
I... počet izolovaných úseček



Operátor diference

Operátor diference. Pro měřitelnou funkci $F : \mathcal{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ a $y \in E$ definujeme operátor diference jako

$$D_y F(\mu) = F(\mu + \delta_y) - F(\mu).$$

Diference $i-$tého řádu je pak dána jako

$$D_{y_1,\dots,y_i} F = D_{y_1} D_{y_2,\dots,y_i} F, \qquad y_1, \dots y_i \in E.$$

Dále definujeme symetrickou funkci $T_n F$ na E^n předpisem

$$T_n^{\mu} F(y_1, \dots, y_n) = \mathbb{E} D^n_{y_1,\dots,y_n} F(\mu).$$

U–statistiky

Pro bodový proces $\mu : \mathcal{N} \longrightarrow E$ a pevné k definujeme $U-$statistiku 'v rádu k jako náhodnou veličinu F danou předpisem

$$F(\mu) = \sum_{(x_1,\dots.x_k)\in\mu^k_{\neq}} f(x_1,\dots,x_k),$$

kde f je symetrická $L^1(E)$ funkce a symbol $(x_1,\dots.x_n) \in \mu^k_{\neq}$ značí k-tice navzájem různých bodů procesu μ.

Momenty funkcionálů nepoissonovských procesů

Uvažujme proces μ na prostoru E s hustotou p vzhledem k Poissonovu procesu η. Označme $G_m = F^m p$.
Potom

$$\mathbb{E}F^m(\mu) = \mathbb{E}G_m(\eta), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Nechť platí $p(\mathbf{x}) > 0 \Rightarrow p(\widetilde{\mathbf{x}}) > 0$ pro každé $\widetilde{\mathbf{x}} \subset \mathbf{x}$. Pro $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ definujeme *Papangelouovu podmíněnou intenzitu* řádu n

$$\lambda_n^*(u_1 \dots u_n, \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} \cup \{u_1 \dots u_n\})}{p(\mathbf{x})}, \qquad u_1 \dots u_n \in E.$$

Pro hustotu p Poissonova procesu platí

$$T_n p_{(y_1,\dots,y_n)}(\eta) = \sum_{J \subset \{1,\dots,n\}} (-1)^{n-|J|} \mathbb{E} \lambda^*_{|J|}(\{y_j,\, j \in J\}, \mu). \qquad (2)$$

Věta. Pro U-statistiku $F(\mu) \in L_m(P_\mu)$ řádu k máme

$$\mathbb{E} F^m(\mu) = \mathbb{E} F^m(\eta) + \sum_{n=1}^{mk} \frac{1}{n!} \langle T_n F^m, T_n p \rangle_n. \qquad (3)$$

Charakteristiky bodových procesů úseček

Vraťme se k procesu interagujících úseček μ. Uvažujme následující charakteristiky

- celkovou délku sjednocení U_μ

$$L(\mu) = \sum_{x \in \mu} l(x)$$

  , kde $l(x)$ značí délku úsečky x.

- počet průsečíků v daném procesu

$$N(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{(x_1, x_2) \in \mu^2_{\neq}} \mathbf{I}_{\{x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}}$$

Potom L resp. N jsou $U-$statistiky řádu jedna, resp. dva.

Momenty procesu úseček

Pro $U-$statistiky L a N platí

$$\mathbb{E}L = \int_E \mathbb{E}[\lambda^*(y)]l(y)\mathrm{d}\lambda y$$

$$\mathbb{E}L^2 = \int_{E^2} \mathbb{E}[\lambda^*(y_1, y_2)]l(y_1)l(y_2)\mathrm{d}\lambda y_1 \mathrm{d}\lambda y_2 + \int_E \mathbb{E}[\lambda * (y)]l^2(y)\mathrm{d}\lambda y$$

$$\mathbb{E}N = \frac{1}{2}\int_{E^2} \mathbb{E}[\lambda_2^*(x_1, x_2, \mu)]\mathbf{I}_{\{x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}}\mathrm{d}\lambda(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}N^2 = {} & \frac{1}{2}\int_{E^2} \mathbf{I}^2_{\{x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}}\mathbb{E}[\lambda_2^*(x_1, x_2)]\mathrm{d}\lambda(x_1, x_2) \\ & + \int_{E^3} \mathbf{I}_{\{x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}}\mathbf{I}_{\{x_1 \cap x_3 \neq \emptyset\}}\mathbb{E}[\lambda_3^*(x_1, x_2, x_3)]\mathrm{d}\lambda(x_1, x_2, x_3) \\ & + \frac{1}{4}\int_{E^4} \mathbf{I}_{\{x_1 \cap x_2 \neq \emptyset\}}\mathbf{I}_{\{x_3 \cap x_4 \neq \emptyset\}}\mathbb{E}[\lambda_2^*(x_1, x_2, x_3, x_4)]\mathrm{d}\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)\end{aligned}$$

Délková intenzita

Pro bodový proce μ definujeme délkovou intenzitu

$$\gamma = \mathbb{E} \int H^1(\mathbf{x} \cap [0,1]^d)\mu(\mathrm{d}\mathbf{x}),$$

kde H^1 značí Hausdorfovu míru dimenze 1.

Pro pro Poissonův proces úseček s $\rho(z) = \rho$ je

$$\gamma = \rho \mathbb{E} l.$$

Odhad délkové intenzity procesu pozorovaného v okně $|W|$ je

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{|W|} \sum_{\mathbf{x} \in \mu} H^1(\mathbf{x} \cap W).$$

Literatura

This work was supported by the Czech Science Foundation, grant P201-10-0472.

Reference:

Last G., Penrose M.D. (2011) Poisson process Fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities, Probab. Theory Relat. Fields, 150, 663–690.

Reitzner M., Schulte M. (2012) Central limit theorems for U-statistics of Poisson point processes, Annals of Probability, accepted for publication.

Benes V., Zikmundova M. (2014) Functionals of spatial point processes having a density with respect to the Poisson process. arXiv:1401.2783 [math.PR], Kybernetika, submitted.