Kalibrace korelace mezi úrokovými sazbami a časem defaultu

Jakub Černý

KPMS MFF UK

jcerny@karlin.mff.cuni.cz

ROBUST, 21.1.2014, Jetřichovice

Obsah

Motivace

- **Basel III** přináší nový přístup k výpočtu kapitálového požadavku, který je založen na odhadu tzv. **mark-to-market ztrát** (ztráty z tržního přecenění se zahrnutím kreditního rizika).
- Zahrnutí tohoto přístupu do Basel III plyne hlavně z finanční krize v roce 2008, kde se tyto ztráty ukázaly být velmi vysoké.
- **Kreditní přirážka k tržnímu ocenění (CVA)** zohledňuje tuto ztrátu a vypočítá se jako střední hodnota ztráty v případě defaultu protistrany.
- Odhad CVA pro OTC (mimoburzovní) deriváty vyžaduje modelování nejen **budoucí hodnoty podkladového aktiva**, ale současně modelování **pravděpodobnosti defaultu v různých časových obdobích**.

CVA

Označme bezrizikovou cenu finančního derivátu v čase t se splatností v čase T jako $V(t, T)$ a a hodnotu derivátu **zahrnující kreditní riziko protistrany** jako $V^\star(t, T)$.

Věta

Předpokládejme, že τ je čas defaultu protistrany, LGD je míra ztráty při selhání, nebo 1-míra návratnosti, $B(t)$ hodnota běžného účtu v čase t a $\mathbb{Q}$ je rizikově neutrální míra, potom

$$V^\star(t, T) = V(t, T) - \mathrm{CVA}(t, T),$$

kde

$$\mathrm{CVA}(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{LGD} \cdot \mathbb{1}_{[\tau \leq T]} \cdot \max(V(\tau, T), 0) \frac{B(t)}{B(\tau)}\right].$$

Wrong-way riziko

Wrong-way riziko je nepříznivá závislost mezi expozicí a časem defaultu. Příklad z knihy [*Gregory(2010)*]:

- Společnost a banka vstoupí do tzv. **cross-currency swapu** (výměna dvou různých měn).
- Předpokládejme, že banka vypočítá **CVA bez zahrnutí wrong-way rizika**.
- Ale kreditní kvalita společnosti **závisí** na swapové měně.
- Pokud se **kurz snižuje**, potom se **kreditní kvalita** společnosti **zhoršuje** a **expozice je daleko vyšší**.

Předpoklady

Nechť je vývoj swapové sazby s_T v rizikově neutrálním prostředí řízen Blackovým modelem s konstantní volatilitou $\sigma > 0$,

$$s_T = s_0 \exp\{-\sigma^2 T/2 + \sigma\sqrt{T}Y\}, \;\; Y \sim N(0,1)$$

a nechť čas defaultu τ splňuje

$$\begin{aligned} \tau &= S^{-1}(1 - \Phi(Z)), \;\; Z \sim N(0,1), \\ S(t) &= \exp\{-ht\}, h > 0 \end{aligned}$$

kde h je intenzita defaultu, Φ je distribuční funkce standardního normálního rozdělení.

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{\rho}U + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_1, \;\; \rho \in [0,1], \\ Z &= \sqrt{\rho}U + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_2. \end{aligned}$$

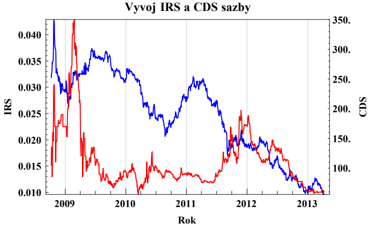
U, ε_1 a ε_2 jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny se standardním normálním rozdělením.

Praktický problém

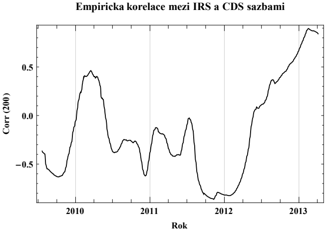
Za uvedených předpokladů jsme vyvinuli **semianalytický vzorec** pro výpočet CVA IRS **zahrnující wrong-way riziko** (viz [*Černý, Witzany(2013)*]). Nicméně jsme neukázali (ani nenabídli) žádnou metodu **kalibrace** korelace ρ.

Dostupná data

V grafech níže je vývoj **5Y IRS sazby** (**modře**), **5Y CDS sazba** (**červeně**) vlády České republiky a empirická korelace mezi nimi.



(a) Vývoj IRS a CDS sazeb od 9.10.2008 do 9.4.2013



(b) Empirická korelace na okně 200 pozorování

Latentní systematický faktor

Označme historicky pozorovaná denní data následovně:

$s_i \ldots$ 5Y IRS sazby, $i = 1, \ldots, n$
$c_i \ldots$ 5Y CDS sazby, $i = 1, \ldots, n$

Předpokládejme, že 5Y trhem implikovaná rizikově neutrální pravděpodobnost defaultu se dá vyjádřit jako $p_i = 1 - e^{-\frac{c_i}{LGD}T}$, tedy vztah mezi intenzitou defaultu a CDS sazbami je následující

$$h_i = \frac{c_i}{LGD}, \quad S(t) = e^{-h_i t},$$

kde **LGD je konstantní** a pro dané ρ můžeme vypočítat implikované hodnoty systematického faktoru U_i

$$U_i = \frac{(1 - \sqrt{1-\rho})\Phi^{-1}\left(1 - e^{-\frac{c_i}{LGD}T}\right)}{\sqrt{\rho}}.$$

Předpokládáme, že U_i jsou autokorelované a řídí se **AR(1) procesem**, tj. $U_i = \rho_U U_{i-1} + \sqrt{1-\rho_U^2}\varepsilon_{U,i}$ s autokorelací ρ_U.

Věrohodnostní funkce

Po dekorelaci této časové řady je věrohodnostní funkce systematického faktoru $\mathbb{U} = (U_1, \ldots, U_n)'$ ve tvaru

$$\mathcal{L}^*(\mathbb{U}|\rho, \rho_U) = \prod_{i=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(U_i - \rho_U U_{i-1})^2}{2(1-\rho_U^2)}\right\}.$$

Věrohodnostní funkce pro $\mathbb{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ je rovna

$$\mathcal{L}^*(\mathbb{Y}|\rho, \rho_U, \mathbb{U}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(Y_i - \rho U_i)^2}{2(1-\rho)}\right\}.$$

Parametry budeme odhadovat metodou maximální věrohodnosti. Sdružená věrohodnostní funkce lze zapsat následovně

$$\mathcal{L}(\mathbb{c}, \mathbb{s}|\rho, \rho_U, \sigma, \mathbb{U}) = \mathcal{L}(\mathbb{s}|\rho, \rho_U, \sigma, \mathbb{U})\mathcal{L}(\mathbb{c}|\rho, \rho_U),$$

Transformace dat

Abychom obdrželi správnou věrohodnostní funkci, je zapotřebí zohlednit **transformace** napozorovaných dat.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{c}|\rho,\rho_U) &= \mathcal{L}^*(\mathbb{U}|\rho,\rho_U)\,|J(\mathbb{c})|\,|J(\mathbb{U})|\,, \\ \mathcal{L}(\mathbb{s}|\rho,\rho_U,\sigma,\mathbb{U}) &= \mathcal{L}^*(\mathbb{Y}|\rho,\rho_U,\mathbb{U})\,|J(\mathbb{s})|\,|J(\mathbb{Y})|\,. \end{aligned}$$

Determinant Jacobiho matice lze ještě zjednodušit do následující podoby

$$\begin{aligned} J(\mathbb{c}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\left(1-\sqrt{1-\rho}\right) Te^{-c_i T/LGD}}{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(1-e^{-c_i T/LGD}\right)\right)\sqrt{\rho}LGD}, \\ J(\mathbb{U}) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho_U^2}}\right)^n, J(\mathbb{Y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho}}\right)^n, \\ J(\mathbb{s}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i\sigma\sqrt{T}}, \end{aligned}$$

kde φ je hustota standardního normálního rozdělení.

Výsledné odhady

Odhad parametrů **metodou maximální věrohodnosti** byl proveden v softwaru *Mathematica*®9 pomocí funkce `NMaximize`. V tabulce níže jsou uvedeny výsledné odhady parametrů

Parametr	ρ_U	ρ	σ
Odhad	0.9998967	0.603058	0.2592732

Tabulka 1: Výsledné odhady parametrů

a jejich asymptotický rozptyl na diagonále Fisherovy informační matice

$$diag(\mathcal{I}(\rho_U, \rho, \sigma)) = \left\{3.07 \cdot 10^{-11}, 1.68 \cdot 10^{-4}, 1.88 \cdot 10^{-5}\right\}.$$

Z výsledků je zřejmé, že **nelze uvažovat nezávislost** mezi IRS sazbami a časem defaultu, protože korelace ρ je významná.

Dopad na CVA

Uvažujme nyní 5Y IRS uzavřený dne 9.4.2013, kde rizikovou protistranou je Česká republika.

CVA tohoto swapu, tj. cena swapu v okamžiku uzavření, se po zahrnutí wrong-way rizika (WWR) **řádově zvýšilo** (viz Tabulka 2), a proto by toto riziko při výpočtu CVA nemělo být ignorováno.

CVA bez WWR	**CVA s WWR**
$-7.906 \cdot 10^{-5}$	$-2.914 \cdot 10^{-4}$

Tabulka 2: CVA s a bez zahrnutí wrong-way rizika

Literatura

- Černý J., Witzany J. (2013): Interest Rate Credit Value Adjustment, Available at SSRN: `http://ssrn.com/abstract=2302519`.
- Gregory, J. (2010): Counterparty Credit Risk: The New Challenge for Global Financial Markets, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, United Kingdom.
- Witzany J. (2009): A Two-Factor Model for PD and LGD Correlation , IES Working Papers, Available at SSRN: `http://ssrn.com/abstract=1476305`.

Děkuji za pozornost a přeji dobrou chuť.