Probability Limit Identification Functions (PLIF)

Pavel Kříž, Josef Štěpán

Katedra pravděpodpobnosti a matematické statistiky
Univerzita Karlova v Praze

Robust 2014, Jetřichovice

Poděkování: Tato práce byla podporována grantem SVV-2013-267 315

Obsah

Motivace - teorie odhadu

- Základní rámec:
  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$, kde $\theta \in \Theta$; $\qquad g(\theta) = ?$

- Silně konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta\left[T_1, T_2, \ldots \longrightarrow g(\theta)\right] = 1 \quad \forall\theta \in \Theta$$

- Slabě konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta\left[|T_n - g(\theta)| > \epsilon\right] \longrightarrow 0 \quad \forall\epsilon > 0, \forall\theta \in \Theta$$

Motivace - teorie odhadu

- Základní rámec:
  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$, kde $\theta \in \Theta$; $\qquad g(\theta) = ?$

- Silně konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta\left[T_1, T_2, \ldots \longrightarrow g(\theta)\right] = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$$

- Slabě konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta\left[|T_n - g(\theta)| > \epsilon\right] \longrightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0, \forall \theta \in \Theta$$

- $\omega \in \Omega$, $g(\theta) = ?$:
  Silná konzistence $\Rightarrow T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots \longrightarrow g(\theta)$
  Slabá konzistence $\Rightarrow T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots \longrightarrow ?$

Motivace - teorie odhadu

- Základní rámec:
  $(\Omega, \mathcal{A}, P_\theta)$, kde $\theta \in \Theta$; $\qquad g(\theta) = ?$

- Silně konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta \left[T_1, T_2, \ldots \longrightarrow g(\theta) \right] = 1 \quad \forall \theta \in \Theta$$

- Slabě konzistentní odhady T_n:
  $$P_\theta \left[|T_n - g(\theta)| > \epsilon \right] \longrightarrow 0 \quad \forall \epsilon > 0, \forall \theta \in \Theta$$

- $\omega \in \Omega$, $g(\theta) = ?$:
  Silná konzistence $\Rightarrow T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots \longrightarrow g(\theta)$
  Slabá konzistence $\Rightarrow T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots \longrightarrow ?$

- PLIF:
  $$f : \left(T_1(\omega), T_2(\omega), \ldots \right) \mapsto g(\theta) \quad P_\theta\text{-skoro jistě} \quad \forall \theta \in \Theta$$
  Pozn.: $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$

Definice PLIF

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$...pravděpodobnostní prostor;
- $\mathcal{X}$...množina všech náhodných posloupností konvergujících v pravděpodobnosti;

Definition

Zobrazení $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ je **PLIF na** $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$, pokud pro libovolnou náh. posl. $X_1, X_2, \ldots$ z $\mathcal{X}^*$ platí

$$f\Big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots\Big) = \Big(\operatorname*{P\text{-}lim}_{n\to\infty} X_n\Big)(\omega), \quad \text{pro s.v. } \omega \in \Omega.$$

Definice PLIF

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$...pravděpodobnostní prostor;
- $\mathcal{X}$...množina všech náhodných posloupností konvergujících v pravděpodobnosti;

Definition

Zobrazení $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ je **PLIF na** $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$, pokud pro libovolnou náh. posl. $X_1, X_2, \ldots$ z $\mathcal{X}^*$ platí

$$f\Big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots\Big) = \Big(\operatorname*{P\text{-}lim}_{n\to\infty} X_n\Big)(\omega), \quad \text{pro s.v. } \omega \in \Omega.$$

Poznámky:

- Univerzální PLIF: PLIF na $\mathcal{X}$
- Adaptovaný PLIF: $f(x_1, x_2, \ldots) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_1, \ldots, x_n)$

Známé výsledky

- J. Štěpán: **Univerzální PLIF** pro reálné náhodné veličiny **existuje** za hypotézy kontinua.
  Důkaz založen na konvergenci s.j. vybraných podposloupností a transfinitní indukci.

Známé výsledky

- J. Štěpán: **Univerzální PLIF** pro reálné náhodné veličiny **existuje** za hypotézy kontinua.
  Důkaz založen na konvergenci s.j. vybraných podposloupností a transfinitní indukci.
  - Existence rozšířena pro náh. vel. s hodnotami **v libovolném separabilním metrickém prostoru**.

    $\Longrightarrow$ Stochastický integrál ”po trajektoriích”.

Známé výsledky

- J. Štěpán: **Univerzální PLIF** pro reálné náhodné veličiny **existuje** za hypotézy kontinua.

  Důkaz založen na konvergenci s.j. vybraných podposloupností a transfinitní indukci.

  - Existence rozšířena pro náh. vel. s hodnotami **v libovolném separabilním metrickém prostoru**.

    $\Longrightarrow$ Stochastický integrál ”po trajektoriích”.

- D. Blackwell: **Univerzální PLIF nemůže** být Borelovsky **měřitelný** (ani pro 0-1 náhodné veličiny).

  Důkaz založen na Oxtobyho kategoriálním 0-1 zákonu.

Adaptovaný měřitelný PLIF

Založen na konečnéme počtu pozorování:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\Big(X_1(\omega), ..., X_n(\omega)\Big) = \Big(\operatorname*{P\text{-}lim}_{n\to\infty} X_n\Big)(\omega) \quad \text{pro } P\text{-s.v. } \omega$$

Adaptovaný měřitelný PLIF

Založen na konečnéme počtu pozorování:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(X_1(\omega), ..., X_n(\omega)\right) = \left(\underset{n\to\infty}{\text{P-lim}}\, X_n\right)(\omega) \quad \text{pro } P\text{-s.v. } \omega$$

$\rightarrow$ Hledání vhodné podmnožiny $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$:

Adaptovaný měřitelný PLIF

Založen na konečnéme počtu pozorování:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\Big(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\Big) = \Big(\operatorname*{P-lim}_{n\to\infty} X_n\Big)(\omega) \quad \text{pro } P\text{-s.v. } \omega$$

$\rightarrow$ Hledání vhodné podmnožiny $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$:

1. $\mathcal{X}^*$ = množina náh. posl., jejichž rozdělení jsou dominovaná jedinou (σ-konečnou) mírou.
   $\rightarrow$ tato $\mathcal{X}^*$ příliš malá

Adaptovaný měřitelný PLIF

Založen na konečnéme počtu pozorování:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\Big(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega)\Big) = \Big(\operatorname*{P\text{-}lim}_{n\to\infty} X_n\Big)(\omega) \quad \text{pro } P\text{-s.v. } \omega$$

$\rightarrow$ Hledání vhodné podmnožiny $\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$:

1. $\mathcal{X}^*$ = množina náh. posl., jejichž rozdělení jsou dominovaná jedinou (σ-konečnou) mírou.
   $\rightarrow$ tato $\mathcal{X}^*$ příliš malá
2. $\mathcal{X}^*$ = množina náh. posl. se stejnou závislostní strukturou a s libovolnými marginálními rozděleními koordinát

Rozšířená Skorochodova reprezentace

Uvažujme:

- G = polský prostor;
- $\mathcal{P}(G)$ = množina všech Borel. pravděp. měr na G.

Rozšířená Skorochodova reprezentace

Uvažujme:

- G = polský prostor;
- $\mathcal{P}(G)$ = množina všech Borel. pravděp. měr na G.

$\Rightarrow$ Existuje spojitá reprezentace $\gamma : \mathcal{P}(G) \times [0, 1] \to G$:

- $\gamma(\mu, .)$... náh. vel. s rozdělením μ; a
- $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\mu_n, .) \xrightarrow{\text{s.j.}} \gamma(\mu, .)$.

Rozšířená Skorochodova reprezentace

Uvažujme:

- G = polský prostor;
- $\mathcal{P}(G)$ = množina všech Borel. pravděp. měr na G.

$\Rightarrow$ Existuje spojitá reprezentace $\gamma : \mathcal{P}(G) \times [0, 1] \to G$:

- $\gamma(\mu, .)$... náh. vel. s rozdělením μ; a
- $\mu_n \xrightarrow{\text{w}} \mu \quad \Longrightarrow \quad \gamma(\mu_n, .) \xrightarrow{\text{s.j.}} \gamma(\mu, .)$.

Klasický příklad:

$$\gamma(\mu, u) = F_\mu^{-1}(u)$$

Náhodné posloupnosti se stejnou závislostní strukturou

Zvolme pevně:

- γ = spojitá reprezentace $\mathcal{P}(G)$;
- $(R_1, R_2, \ldots)$ náhodná posloupnost: R_i rovnoměrně rozdělené na [0,1].

Náhodné posloupnosti se stejnou závislostní strukturou

Zvolme pevně:

- γ = spojitá reprezentace $\mathcal{P}(G)$;
- $(R_1, R_2, ...)$ náhodná posloupnost: R_i rovnoměrně rozdělené na [0,1].

Definujme:
$\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$ tvořená posloupnostmi $(X_1, X_2, ...)$ generovanými:

$$X_n(\omega) := \gamma\Big(\mu_n, R_n(\omega)\Big), \quad \mu_n \in \mathcal{P}(G).$$

$\Rightarrow$ Exituje adaptovaný, měřitelný PLIF na $\mathcal{X}^*$.

Náhodné posloupnosti se stejnou závislostní strukturou

Zvolme pevně:

- γ = spojitá reprezentace $\mathcal{P}(G)$;
- $(R_1, R_2, ...)$ náhodná posloupnost: R_i rovnoměrně rozdělené na [0,1].

Definujme:
$\mathcal{X}^* \subset \mathcal{X}$ tvořená posloupnostmi $(X_1, X_2, ...)$ generovanými:

$$X_n(\omega) := \gamma\Big(\mu_n, R_n(\omega)\Big), \quad \mu_n \in \mathcal{P}(G).$$

$\Rightarrow$ Exituje adaptovaný, měřitelný PLIF na $\mathcal{X}^*$.

Klasický příklad:
$\mathcal{X}^*$ = posloupnosti se stejnými (konečně rozměrnými) kopulami.

DĚKUJI ZA POZORNOST!

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega) \Big) \longmapsto \Big(\int XdB \Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega) \Big) \longmapsto \Big(\int XdB \Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

1. Aproximate X with simple (jump) processes:
   $X(\omega) \longmapsto X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega)\Big) \longmapsto \Big(\int XdB\Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

1. Aproximate X with simple (jump) processes:
   $X(\omega) \longmapsto X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$
2. Integrate simple processes:
   $\Big(X_n(\omega), B(\omega)\Big) \mapsto \Big(\int X_n dB\Big)(\omega) = \sum_n X_{t_n}(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega)\Big) \longmapsto \Big(\int XdB\Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

1. Aproximate X with simple (jump) processes:
   $X(\omega) \longmapsto X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots$
2. Integrate simple processes:
   $\Big(X_n(\omega), B(\omega)\Big) \mapsto \Big(\int X_n dB\Big)(\omega) = \sum_n X_{t_n}(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$
3. Determine the probability limit of the sequence:

$$I_n := \int X_n dB \xrightarrow{P} \int XdB \qquad \text{in space } \Big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), d\Big)$$

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega) \Big) \longmapsto \Big(\int XdB \Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

1. Aproximate X with simple (jump) processes:
   $X(\omega) \longmapsto X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$
2. Integrate simple processes:
   $\Big(X_n(\omega), B(\omega) \Big) \mapsto \Big(\int X_n dB \Big)(\omega) = \sum_n X_{t_n}(B_{t_n+1} - B_{t_n})$
3. Determine the probability limit of the sequence:

$$I_n := \int X_n dB \xrightarrow{P} \int XdB \qquad \text{in space } \Big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), d \Big)$$

Application - pathwise representation of stochastic integral (Štěpán, Kříž)

SETTING:
$(\Omega, \mathcal{A}, \{\mathcal{F}_n\}, P)$, B - Brownian motion
AIM:

$$I : \Big(X(\omega), B(\omega)\Big) \longmapsto \Big(\int XdB\Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

1. Aproximate X with simple (jump) processes:
   $X(\omega) \longmapsto X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$
2. Integrate simple processes:
   $\Big(X_n(\omega), B(\omega)\Big) \mapsto \Big(\int X_n dB\Big)(\omega) = \sum_n X_{t_n}(B_{t_{n+1}} - B_{t_n})$
3. Determine the probability limit of the sequence:

$$I_n := \int X_n dB \xrightarrow{P} \int XdB \qquad \text{in space } \Big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), d\Big)$$

$$\Rightarrow f : \Big(I_1(\omega), I_2(\omega), \dots\Big) \xrightarrow{\text{a.s.}} \Big(\operatorname*{P-lim}_{n\to\infty} I_n\Big)(\omega) \dots \text{PLIF on } \Big(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+), d\Big)$$

Functional representation to weak solutions to SDE

Stochastic integral with general integrator

$$I : \Big(X(\omega), M(\omega)\Big) \longmapsto \Big(\int XdM\Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

Functional representation to weak solutions to SDE

Stochastic integral with general integrator

$$I : \Big(X(\omega), M(\omega)\Big) \longmapsto \Big(\int XdM\Big)(\omega) \text{ a.s.}$$

Weak solution to SDE

- $dX_t = \sigma(t, X)dB_t + b(t, X)dt$
- $B(\omega) := F\Big(X(\omega), u(\omega)\Big) \quad \Longrightarrow \quad (X, B)$ solves the SDE