

$$H_{\leq} : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Testování hypotéz parametru driftu u stochastických procesů

David Stibůrek

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta
Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

21. ledna 2014

Obsah

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen přibližně

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout, T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

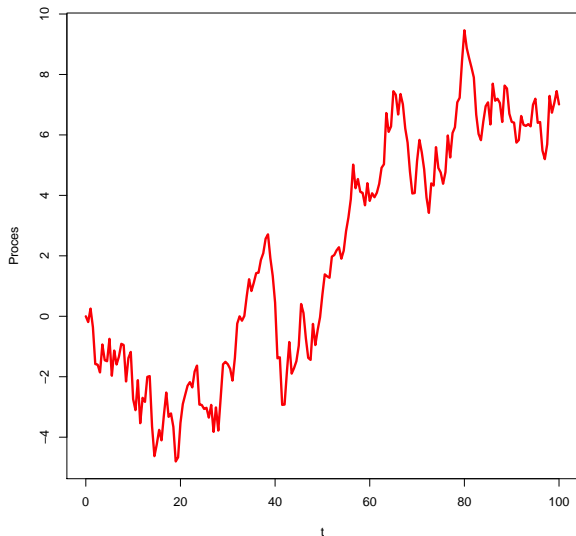
Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Motivace - je zde nějaký trend?

Testování hypotéz
parametru driftnu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ Necht' pozorujeme

$$Y_t = ad(t) + \sigma B_t,$$

kde B_t je **symetrický, gaussovský, sebepodobný proces**, se **známou kovarianční strukturou** a $d(t)$ je známá deterministická funkce tak, že $d(0) = 0$ a $d(t) \nearrow \infty$ pro $t \rightarrow \infty$.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ Necht' pozorujeme

$$Y_t = ad(t) + \sigma B_t,$$

kde B_t je **symetrický, gaussovský, sebepodobný proces**, se **známou kovarianční strukturou** a $d(t)$ je známá deterministická funkce tak, že $d(0) = 0$ a $d(t) \nearrow \infty$ pro $t \rightarrow \infty$.

- ▶ Cílem je **odhadnout** neznámé parametry a a σ a **testovat hypotézy** o nich.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Možné řešení

- ▶ Zvolme $c > 0$ a pozorujme proces v časech

$$t_k = ck, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- ▶ Pozorování $Y_c, Y_{2c}, \dots, Y_{nc}$ transformujeme pro $k = 1, 2, \dots, n$ na

$$\begin{aligned} Z_k &= Y_{kc} - Y_{(k-1)c} \\ &= a[d(kc) - d((k-1)c)] + \sigma (B_{kc} - B_{(k-1)c}). \end{aligned}$$

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B, T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Možné řešení

- ▶ Zvolme $c > 0$ a pozorujme proces v časech

$$t_k = ck, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- ▶ Pozorování $Y_c, Y_{2c}, \dots, Y_{nc}$ transformujeme pro $k = 1, 2, \dots, n$ na

$$\begin{aligned} Z_k &= Y_{kc} - Y_{(k-1)c} \\ &= a[d(kc) - d((k-1)c)] + \sigma (B_{kc} - B_{(k-1)c}). \end{aligned}$$

- ▶ **Zobecněnou metodou nejmenších čtverců** pak parametry a a σ můžeme odhadnout. Kvalita odhadu pro σ pak **nezávisí na c** , ale na počtu pozorování n . Dále $\sigma = 1$.
- ▶ Pro **testování hypotéz** o parametru a je však nevýhoda, že **konečný čas pozorování musíme fixovat předem**.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Inverzní metody - Testování hypotéz

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- ▶ Cílem je testování hypotéz $H_- : a \leq 0$ a $H_0 : a = 0$, proti alternativám $K_- : a > 0$ a $K_0 : a \neq 0$.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Inverzní metody - Testování hypotéz

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- ▶ Cílem je testování hypotéz $H_- : a \leq 0$ a $H_0 : a = 0$, proti alternativám $K_- : a > 0$ a $K_0 : a \neq 0$.

- ▶ Pro testování hypotéz uijeme náhodné časy

$$\tau_{-\infty, B}^{\min}(Y) := \inf \{t \geq 0, Y_t \geq B\} \wedge T_B,$$

$$\tau_B^{\min}(Y) := \inf \{t \geq 0, |Y_t| \geq B\} \wedge T_B.$$

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Inverzní metody - Testování hypotéz

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- ▶ Cílem je testování hypotéz $H_- : a \leq 0$ a $H_0 : a = 0$, proti alternativám $K_- : a > 0$ a $K_0 : a \neq 0$.

- ▶ Pro testování hypotéz uijeme náhodné časy

$$\tau_{-\infty, B}^{\min}(Y) := \inf \{t \geq 0, Y_t \geq B\} \wedge T_B,$$

$$\tau_B^{\min}(Y) := \inf \{t \geq 0, |Y_t| \geq B\} \wedge T_B.$$

- ▶ Máme-li požadavek na hladinu testu $\alpha \in (0, 1)$ a sílu $1 - \beta$ v nějaké alternativě a_1 , pak tyto požadavky obvykle určují jednoznačně hodnoty B a T_B . Hodnota B (při T_B) se určí obvykle za hypotézy $a = 0$. Velikost T_B pak z požadavku na sílu $1 - \beta$ (v a_1).

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

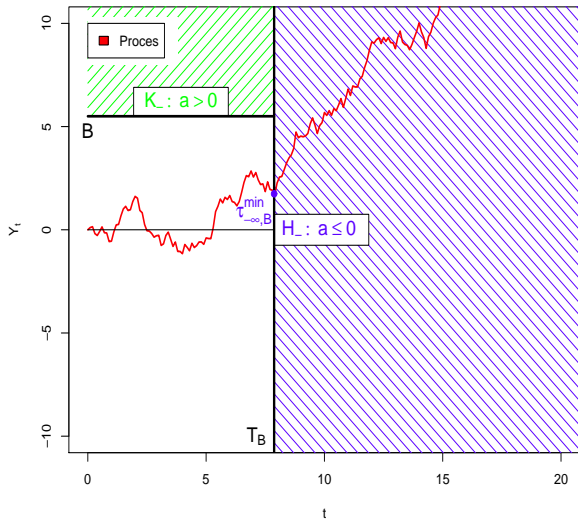
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

1 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

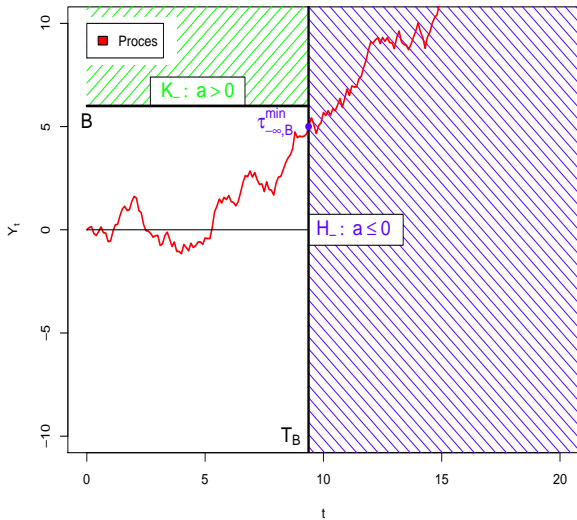
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

1 hranice

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

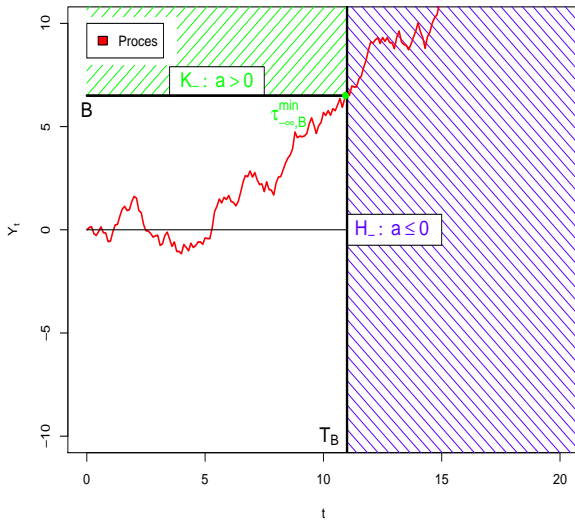
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

1 hranice

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

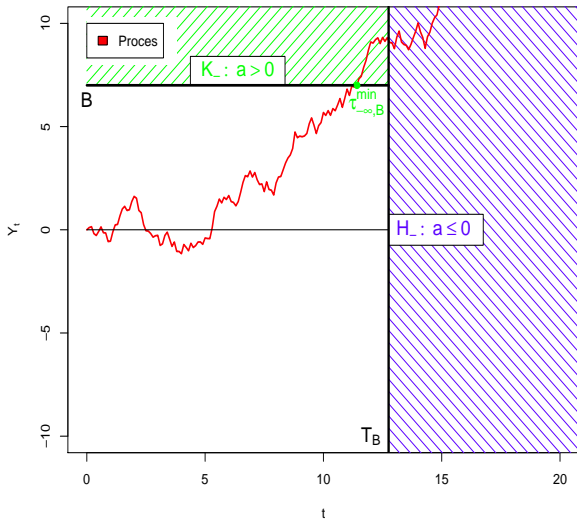
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

1 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

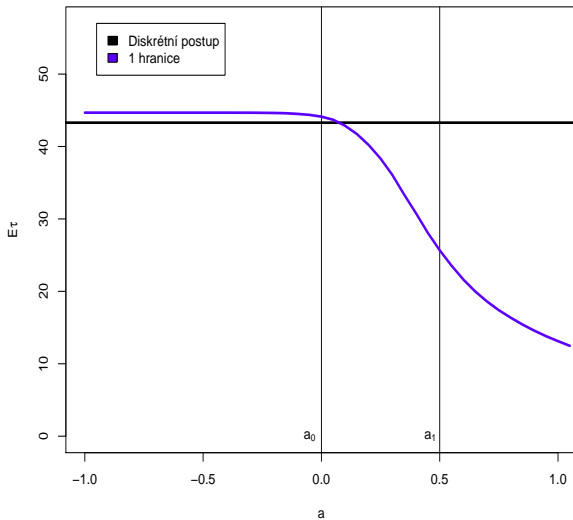
$$H_- : a \leq 0$$

Porovnání

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Doby rozhodnutí pro sílu $1 - \beta = 0.95$ u $H_- : a \leq 0$ vs. $a > 0$
pro $a_1 = 0.5$



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

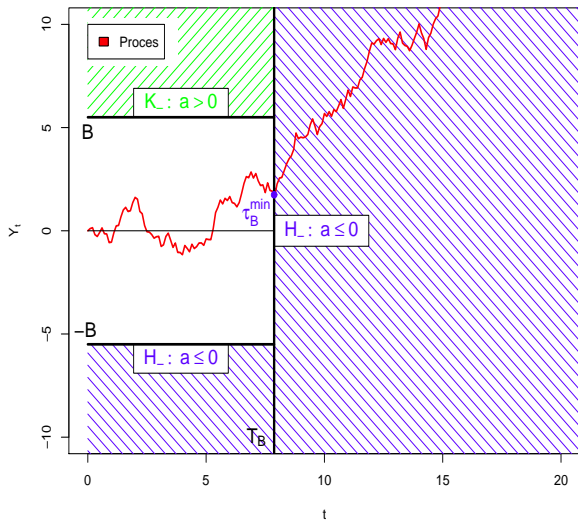
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

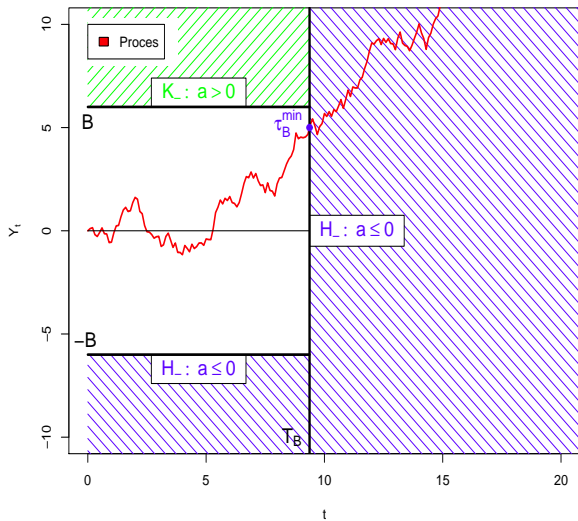
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

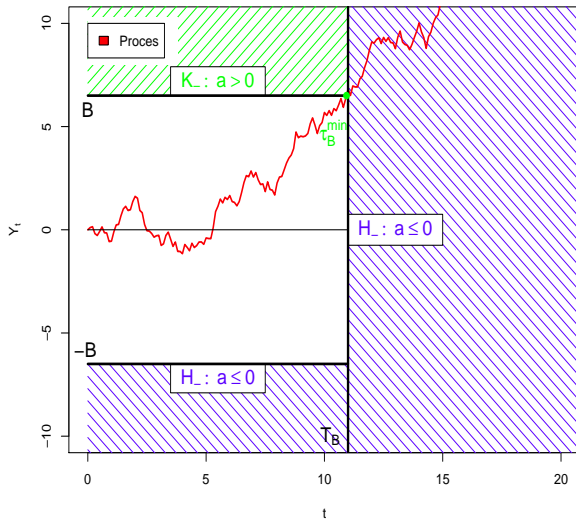
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

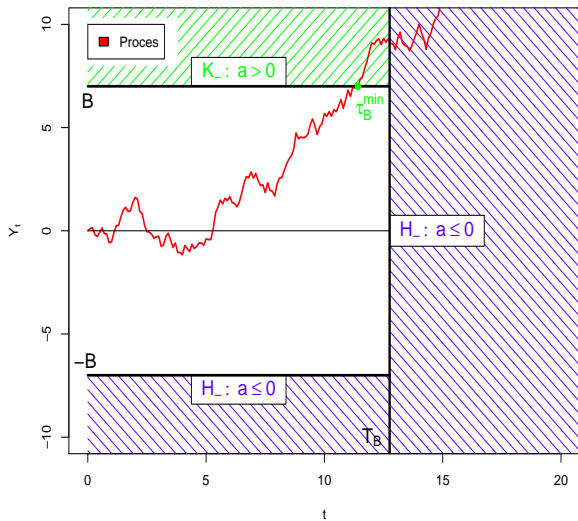
Shrnutí

$H_- : a \leq 0$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru dráhy u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

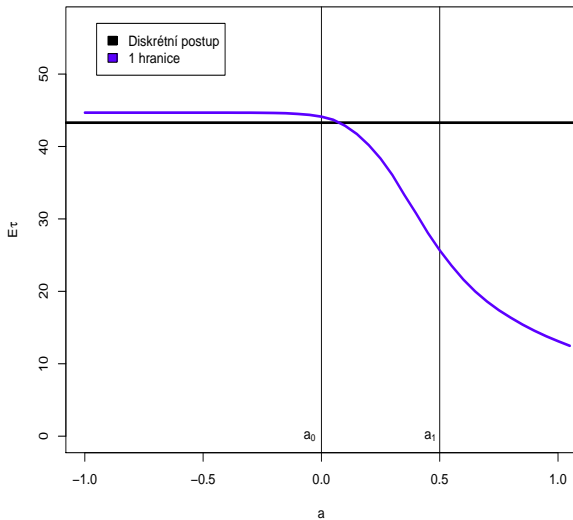
$$H_- : a \leq 0$$

Porovnání

Testování hypotéz
parametru driftnu u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Doby rozhodnutí pro sílu $1 - \beta = 0.95$ u $H_- : a \leq 0$ vs. $a > 0$
pro $a_1 = 0.5$



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

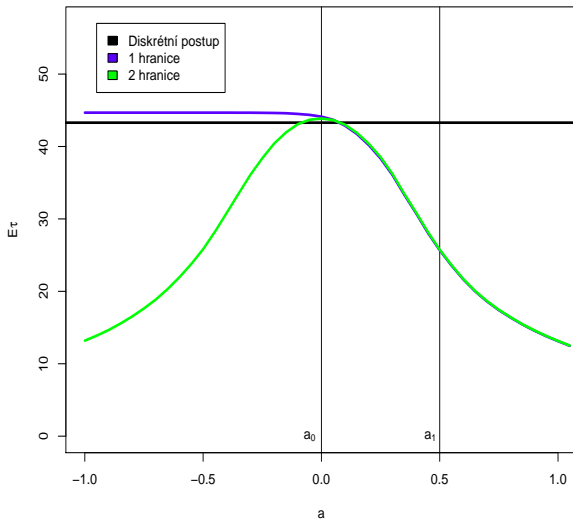
$H_- : a \leq 0$

Porovnání

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Doby rozhodnutí pro sílu $1 - \beta = 0.95$ u $H_- : a \leq 0$ vs. $a > 0$
pro $a_1 = 0.5$



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

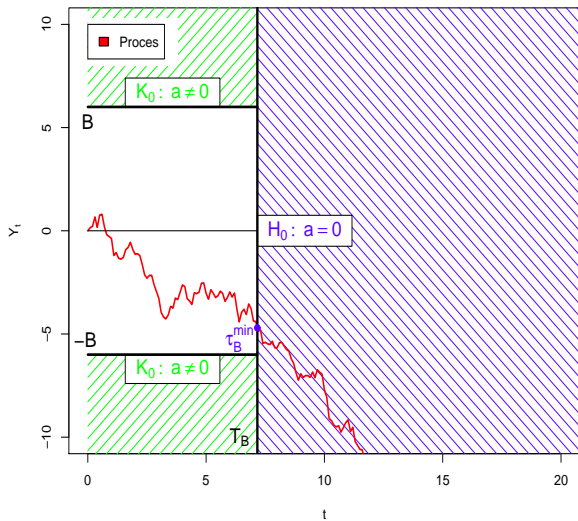
Shrnutí

$$H_0 : a = 0$$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

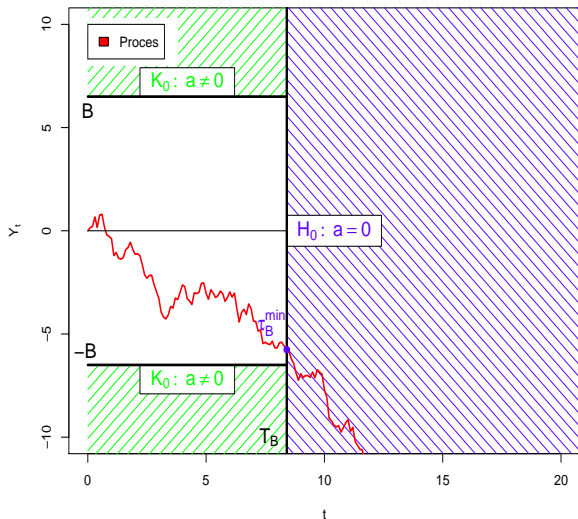
Shrnutí

$$H_0 : a = 0$$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

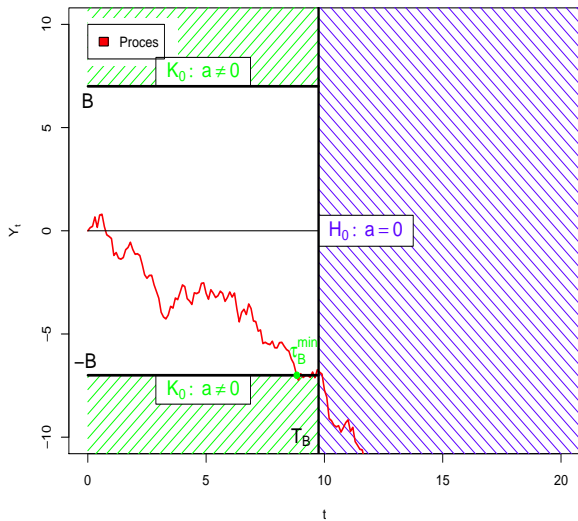
Shrnutí

$H_0 : a = 0$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

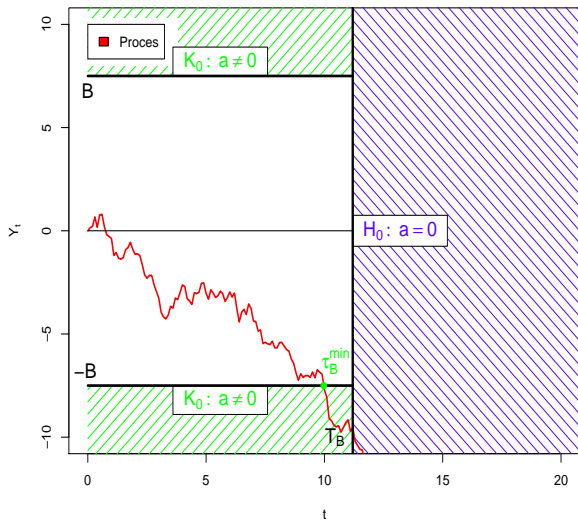
Shrnutí

$$H_0 : a = 0$$

2 hranice

Testování hypotéz
parametru drůtu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

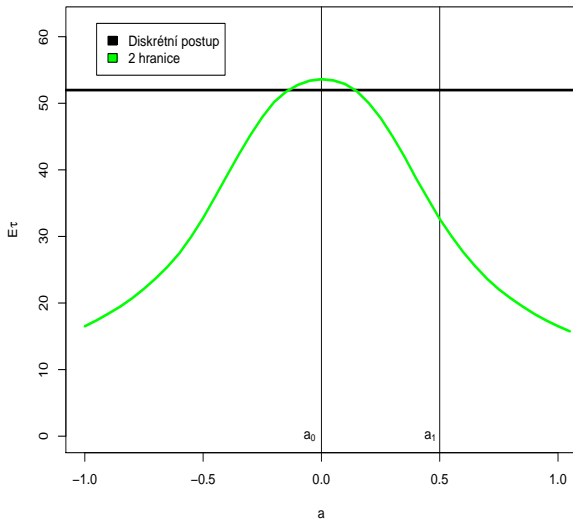
$$H_0 : a = 0$$

Porovnání

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Doby rozhodnutí pro sílu $1 - \beta = 0.95$ u $H_0 : a = 0$ vs. $a \neq 0$
pro $a_1 = 0.5$



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Aplikovatelnost inverzních metod

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ Dále uvedeme náhodné procesy B_t , pro které budou inverzní metody přímo aplikovány v závislosti na požadavek hladiny α a síly $1 - \beta$ v nějaké alternativě a_1 .

Aplikovatelnost inverzních metod

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ Dále uvedeme náhodné procesy B_t , pro které budou inverzní metody přímo aplikovány v závislosti na požadavek **hladiny α** a **síly $1 - \beta$** v nějaké alternativě a_1 .
- ▶ Připomeňme, že **hodnota B** (při T_B) se určí obvykle **za hypotézy $a = 0$** . **Velikost T_B** pak z požadavku na **sílu $1 - \beta$** (v a_1).

Umíme spočítat B i T_B

$$H_{\leq} : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

- ▶ U Wienerova procesu W_t s konstantním driftem

$$Y_t = at + W_t.$$

Viz vzorce z [Horrocks and Thompson, 2004],
[Redekop, 1995] a [Steele, 2001].

Umíme spočítat B i T_B

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

- ▶ U Wienerova procesu W_t s konstantním driftem

$$Y_t = at + W_t.$$

Viz vzorce z [Horrocks and Thompson, 2004],
[Redekop, 1995] a [Steele, 2001].

- ▶ Díky nim můžeme přímo testovat také hypotézy

$H_< : |a| \leq a_0$ a $H_> : |a| \geq a_0$ proti alternativám

$K_< : |a| > a_0$ a $K_> : |a| < a_0$ pro nějaké $a_0 > 0$.

Umíme spočítat B i T_B

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ U **Brownova mostu** W_t^T (na $[0, T]$) s **obecným (kladným) trendem** $d(t)$

$$Y_t = ad(t) + W_t^T.$$

Umíme spočítat B i T_B

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ U **Brownova mostu** W_t^T (na $[0, T]$) s **obecným (kladným) trendem** $d(t)$

$$Y_t = ad(t) + W_t^T.$$

- ▶ Zde díky **omezenosti času** pozorování musíme **fixovat** T_B , např. $T_B = T$. **Hodnotu B** pak můžeme dopočítat jen ze znalosti **rozdělení suprema pro Brownův most**. Viz [Billingsley, 1999] či [Csörgő and Révész, 1981].

Umíme spočít B , T_B jen přibližně

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- Itôův integrál ze známé deterministické funkce $b(t)$ s obecným (rostoucím a neomezeným) trendem

$$Y_t = at + \int_0^t b(s) dW_s \stackrel{D}{=} at + W_{\gamma_b(t)},$$

kde $\gamma_b(t) = \int_0^t b^2(s) ds$.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Umíme spočítat B , T_B jen přibližně

Testování hypotéz
parametru driftního u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- ▶ Itôův integrál ze známé deterministické funkce $b(t)$ s obecným (rostoucím a neomezeným) trendem

$$Y_t = at + \int_0^t b(s) dW_s \stackrel{D}{=} at + W_{\gamma_b(t)},$$

kde $\gamma_b(t) = \int_0^t b^2(s) ds$.

- ▶ Hodnotu B jsme schopni (vůči T_B) určit, neboť známe rozdělení suprema Wienerova procesu. Viz [Billingsley, 1999] či [Csörgő and Révész, 1981].

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Umíme spočítat B , T_B jen přibližně

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek

- ▶ Itôův integrál ze známé deterministické funkce $b(t)$ s obecným (rostoucím a neomezeným) trendem

$$Y_t = ad(t) + \int_0^t b(s) dW_s \stackrel{D}{=} ad(t) + W_{\gamma_b(t)},$$

kde $\gamma_b(t) = \int_0^t b^2(s) ds$.

- ▶ Hodnotu B jsme schopni (vůči T_B) určit, neboť známe rozdělení suprema Wienerova procesu. Viz [Billingsley, 1999] či [Csörgő and Révész, 1981].
- ▶ Dá se dále zobecnit na lineární kombinaci asymptoticky uspořádaných trendových funkcí i na vícerozměrný Itôův integrál ze známých deterministických funkcí.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

- ▶ **Sebepodobný proces** B_t^H s obecným (rostoucím) trendem $d(t)$

$$Y_t = ad(t) + B_t^H.$$

Proces B_t^H může být např. **frakcionální Brownův pohyb** W_t^H nebo **symetrický δ -stabilní Lévyho proces** L_t^δ ($H = \frac{1}{\delta}$).

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

- ▶ **Sebepodobný proces** B_t^H s obecným (rostoucím) trendem $d(t)$

$$Y_t = ad(t) + B_t^H.$$

Proces B_t^H může být např. **frakcionální Brownův pohyb** W_t^H nebo **symetrický δ -stabilní Lévyho proces** L_t^δ ($H = \frac{1}{\delta}$).

- ▶ Díky sebepodobnosti těchto procesů máme

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_B} B_t^H \geq B\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} B_t^H \geq \frac{B}{T_B^H}\right),$$

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_B} |B_t^H| \geq B\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t^H| \geq \frac{B}{T_B^H}\right).$$

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

Testování hypotéz parametru driftu u stochastických procesů

David Stibůrek

- ▶ **Sebepodobný proces** B_t^H s obecným (rostoucím) trendem $d(t)$

$$Y_t = ad(t) + B_t^H.$$

Proces B_t^H může být např. **frakcionální Brownův pohyb** W_t^H nebo **symetrický δ -stabilní Lévyho proces** L_t^δ ($H = \frac{1}{\delta}$).

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen přibližně

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout, T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí

- ▶ Díky sebepodobnosti těchto procesů máme

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_B} B_t^H \geq B\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} B_t^H \geq \frac{B}{T_B^H}\right),$$

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T_B} |B_t^H| \geq B\right) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t^H| \geq \frac{B}{T_B^H}\right).$$

- ▶ Pak klademe $B = T_B^H q_j(\alpha, H)$, kde konstanty $q_j(\alpha, H)$ jsou dány těmito rovnicemi a hladinou α ($j = 1, 2, 3$).

Umíme spočítat B jen teoreticky, T_B jen přibližně

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

- ▶ Stochastický integrál ze známé deterministické $b(t)$ podle L_t^δ s obecným (rostoucím a neomezeným) trendem

$$Y_t = ad(t) + \int_0^t b(s) dL_s^\delta \stackrel{D}{=} ad(t) + L_{\gamma_b(t)}^\delta,$$

kde $\gamma_b(t) = \int_0^t |b(s)|^\delta ds$. Tato rovnost plyne z
[Kallenberg, 1992] či [Rosinski and Woyczynski, 1986].

Umíme B jen odhadnout, T_B jen přibližně

► Proces

$$Y_t = ad(t) + \int_0^t b(s, \omega) dW_s,$$

kde $b(t, \omega)$ je takový proces, že tento integrál je symetrický a L_2 . Užijte se **martingalová maximální nerovnost**.

► Proces

$$Y_t = ad(t) + \int_0^t b(s) dW_s^H,$$

kde $b(s)$ je známá, deterministická, integrovatelná funkce. Užijte se pak **maximální nerovnost od [Mishura, 2008]**.

► Proces

$$Y_t = ad(t) + \int_0^t b(s, \omega) dL_s^\delta,$$

kde $b(t, \omega)$ je takový proces, že tento integrál existuje a je symetrický. Užijte se pak **maximální nerovnost od [Joulin, 2007]**.

Jiné než obdélníkové hranice

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

- ▶ Dosud jsme uvažovali jen obdélníkové hranice, ale může nastat otázka, zda je tento tvar optimální.

Jiné než obdélníkové hranice

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

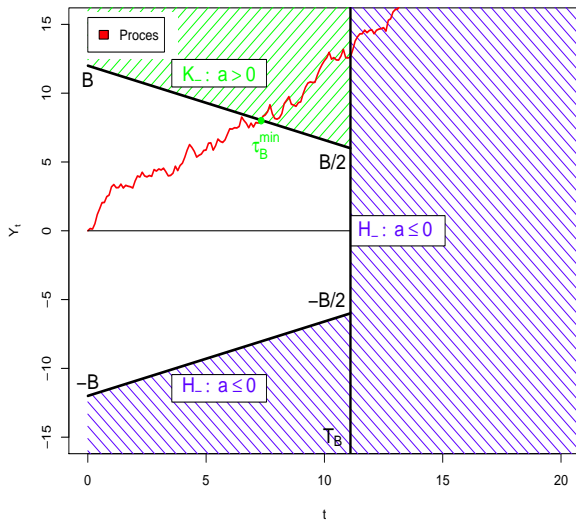
Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

- ▶ Dosud jsme uvažovali jen obdélníkové hranice, ale může nastat otázka, zda je tento tvar optimální.
- ▶ Uvedeme příklad **lichoběžníkového tvaru**.

Zužující se lichoběžník

Testování hypotéz
parametru driftní u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_-: a \leq 0$

$H_0: a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

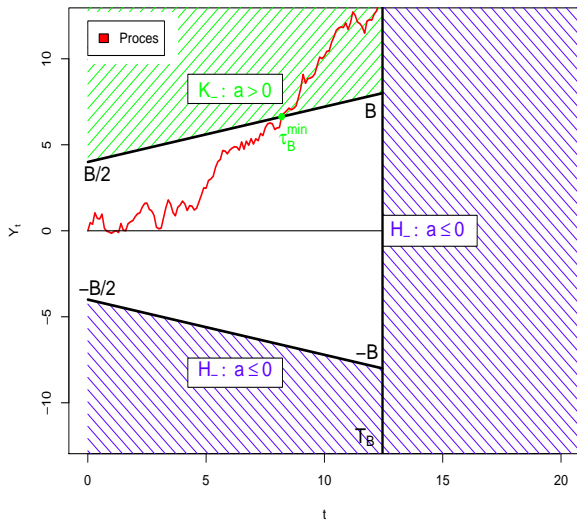
Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Rozšiřující se lichoběžník

Testování hypotéz
parametru dráhy u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_-: a \leq 0$

$H_0: a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

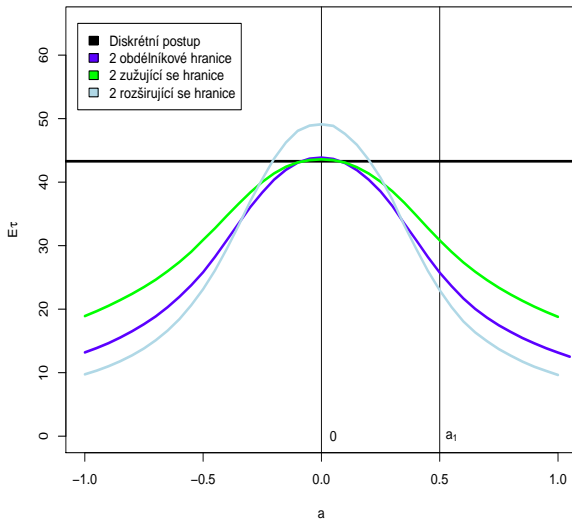
Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Porovnání

Testování hypotéz
parametru driftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočítat B i T_B

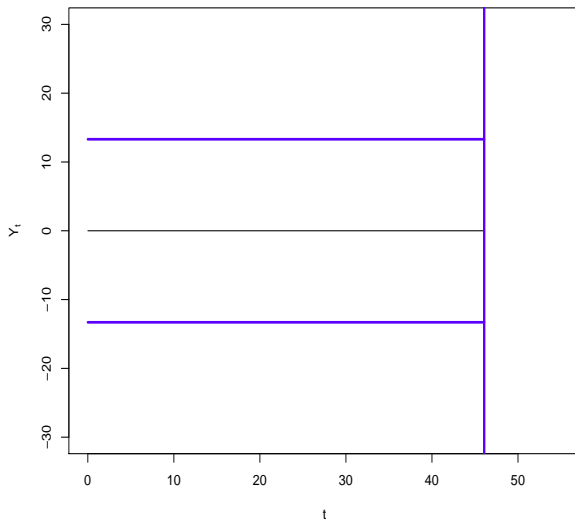
Umíme spočítat B , T_B jen
přibližně

Umíme spočítat B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

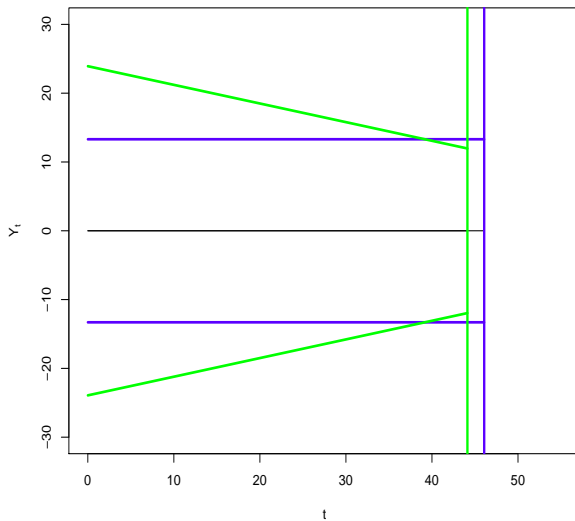
Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

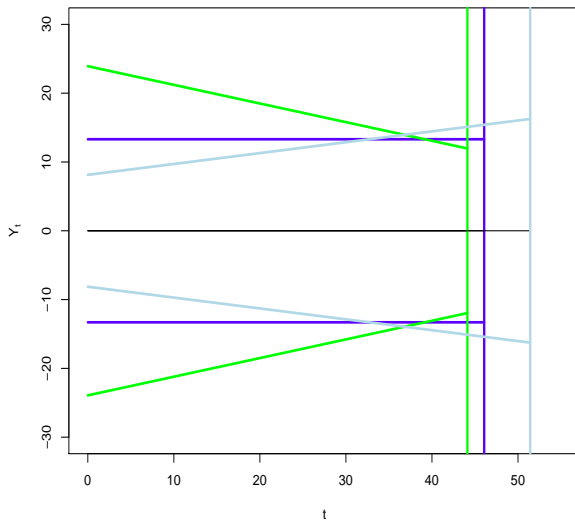
Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

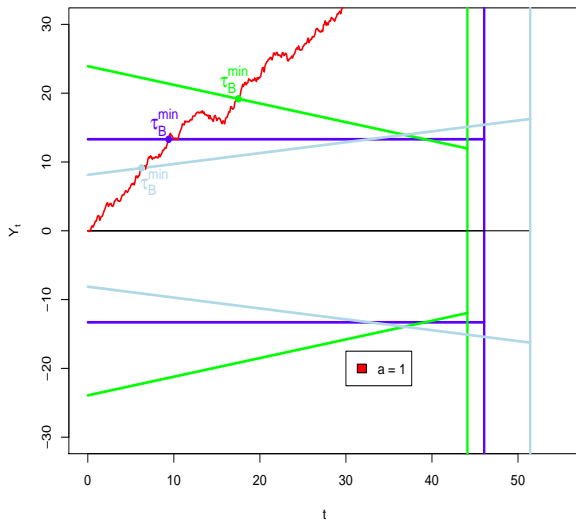
Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

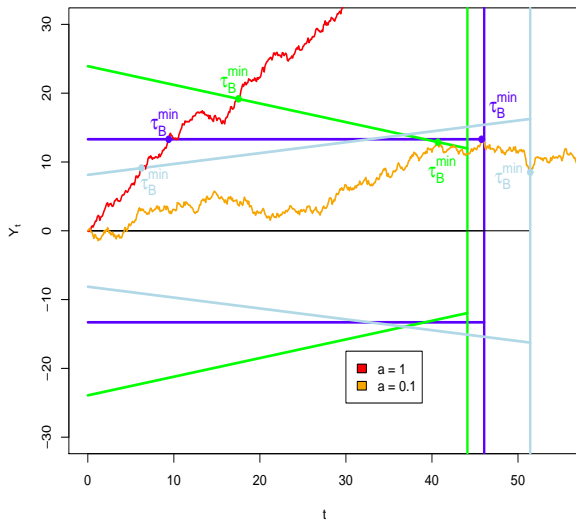
Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Zdůvodnění

Testování hypotéz
parametru dríftu u
stochastických
procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

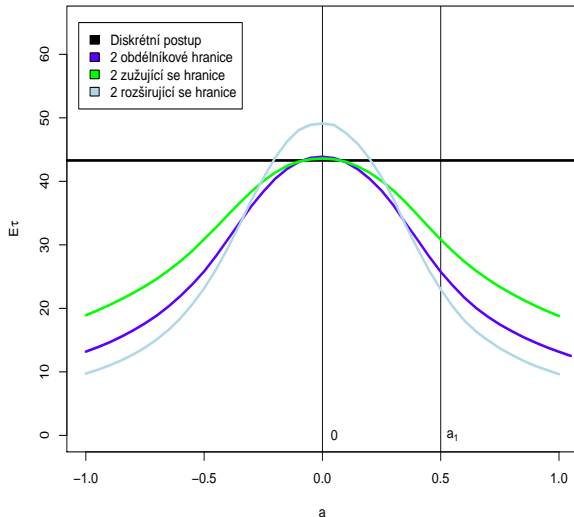
Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Porovnání - nejspíš nepůjde stejnoměrně vůči všem alternativám

Testování hypotéz parametru driftu u stochastických procesů

David Stibůrek



Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$H_- : a \leq 0$

$H_0 : a = 0$

Aplikovatelnost inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen přibližně

Umíme spočít B jen teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout, T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové hranice

Shrnutí

Shrnutí

- ▶ Testování hypotéz u procesu $Y_t = ad(t) + \sigma B_t$ lze dělat jednoduše již **přímým přístupem**. Vůči testování hypotéz a odhadu parametru σ **není tato metoda časově náročná**. Avšak vůči parametru a **není moc efektivní**.

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Shrnutí

- ▶ Testování hypotéz u procesu $Y_t = ad(t) + \sigma B_t$ lze dělat jednoduše již **přímým přístupem**. Vůči testování hypotéz a odhadu parametru σ **není tato metoda časově náročná**. Avšak vůči parametru a **není moc efektivní**.
- ▶ **Inverzní metody** jsou pro testování hypotéz parametru a mnohem **efektivnější**, zejména při užití dvou hranic. **Univerzalita** postupu je široká a dá se použít na procesy s různými **náhodnými částmi**. Důležitá je jejich **symetrie**, **spojitost** a **sebepodobnost**. Rozšíření na další stochastické integrály je možné.

$$H_- : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

- ▶ Testování hypotéz u procesu $Y_t = ad(t) + \sigma B_t$ lze dělat jednoduše již **přímým přístupem**. Vůči testování hypotéz a odhadu parametru σ **není tato metoda časově náročná**. Avšak vůči parametru a **není moc efektivní**.
- ▶ **Inverzní metody** jsou pro testování hypotéz parametru a mnohem **efektivnější**, zejména při užití dvou hranic. **Univerzalita** postupu je široká a dá se použít na procesy s různými **náhodnými částmi**. Důležitá je jejich **symetrie**, **spojitost** a **sebepodobnost**. Rozšíření na další stochastické integrály je možné.
- ▶ **Obdélníkový tvar** kritických oborů ale **není stejnoměrně optimální**. Jak však ukazuje příklad lichoběžníkových kritických oborů, stejnoměrně **optimální kritický obor nejspíš nepůjde nalézt**, a tak bude záležet na nás, pro jaké alternativy dřívější rozhodnutí upřednostníme.

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_{-} : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

$$H_- : a \leq 0$$






$$H_0 : a = 0$$

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

-  Billingsley, P.: *Convergence of Probability Measures, Second Edition*. Wiley, New York, (1999).
-  Csörgő, M., Révész, P.: *Strong approximations in probability and statistics*. Academic Press, New York, (1981).
-  Horrocks, J., Thompson, M. E.: Modeling Event Times with Multiple Outcomes Using the Wiener Process with Drift. *Lifetime Data Analysis* **10**, 29–49, (2004).
-  Joulin A.: *On Maximal Inequalities for Stable Stochastic Integrals*. *Potential Analysis*, **26**, 57–78, (2007).
-  Kallenberg O.: *Some time change representations of stable integrals, via predictable transformations of local martingales*. *Stochastic Processes and their Applications*, **40**, 199–223, (1992).

Motivace

Přímý přístup

Inverzní metody

$$H_{-} : a \leq 0$$

$$H_0 : a = 0$$

Aplikovatelnost
inverzních metod

Umíme spočít B i T_B

Umíme spočít B , T_B jen
přibližně

Umíme spočít B jen
teoreticky, T_B jen přibližně

Umíme B jen odhadnout,
 T_B jen přibližně

Jiné než obdélníkové
hranice

Shrnutí

Děkuji za pozornost!