O symetrii viacrozmerných náhodných veličín

Stanislav Nagy

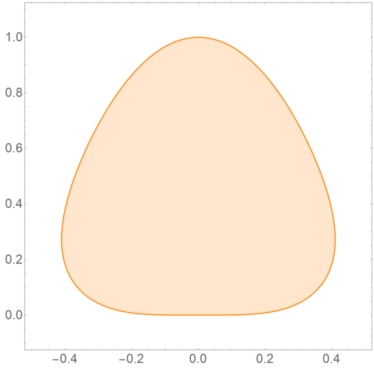
Univerzita Karlova

Rybník 2018

PRIMUS/17/SCI/03: Advanced Geometric Methods in Statistics

Konvexné telesá

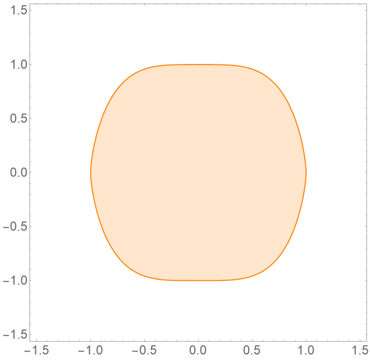
Konvexné teleso je **neprázdna, konvexná a kompaktná** množina $K \subset \mathbb{R}^d$ (Webster, 1994; Schneider, 2014).



Symetria konvexných telies

Konvexné teleso $K \subset \mathbb{R}^d$ je **(stredovo) symetrické** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak

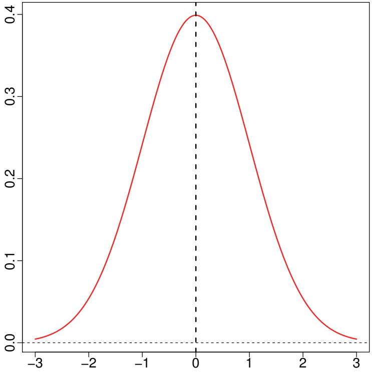
$$K - \theta = -(K - \theta).$$



Symetria distribúcií

$X \sim P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je **(stredovo) symetrická** okolo $\theta \in \mathbb{R}$ ak

$$X - \theta \stackrel{\mathcal{D}}{=} -(X - \theta).$$



Symetria viacrozmerných distribúcií

$X \sim P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je **(stredovo) symetrická** okolo $\theta \in \mathbb{R}$ ak

$$X - \theta \overset{\mathcal{D}}{=} -(X - \theta).$$

Viacero **zovšeobecnení** na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (Serfling, 2006):

- sférická symetria;
- eliptická symetria;
- stredová symetria;
- angulárna symetria (Liu, 1988);
- polopriestorová symetria (Zuo a Serfling, 2000).

Symetria viacrozmerných distribúcií

$X \sim P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ je **(stredovo) symetrická** okolo $\theta \in \mathbb{R}$ ak

$$X - \theta \stackrel{\mathcal{D}}{=} -(X - \theta).$$

Viacero **zovšeobecnení** na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ (Serfling, 2006):

- sférická symetria;
- eliptická symetria;
- **stredová** symetria;
- **angulárna** symetria (Liu, 1988);
- **polopriestorová** symetria (Zuo a Serfling, 2000).

Symetria rozdelení: základná literatúra

- **Beran, R. J. a Millar, P. W. (1988, 1997).** Multivariate symmetry models. *Festschrift for Lucien Le Cam,* 13–42, Springer.
- **Zuo, Y. (1998).** Contributions to the theory and applications of statistical depth functions. *Dissertation,* University of Texas. 153 pp.
- **Zuo, Y. a Serfling, R. (2000).** On the performance of some robust nonparametric location measures relative to a general notion of multivariate symmetry. *J. Stat. Plan. Inference,* 84(1-2):55–79.

Metodológia je považovaná za štandardnú najmä vďaka

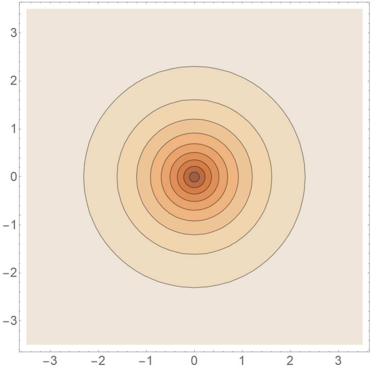
- **Serfling, R. (2006).** Multivariate symmetry and asymmetry. *Encyclopedia of Statistical Sciences, Second Edition,* 8:5338–5345.

Sférická (S-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **sféricky symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak

$$X - \theta \overset{\mathcal{D}}{=} A(X - \theta)$$

pre každú $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ortogonálnu.

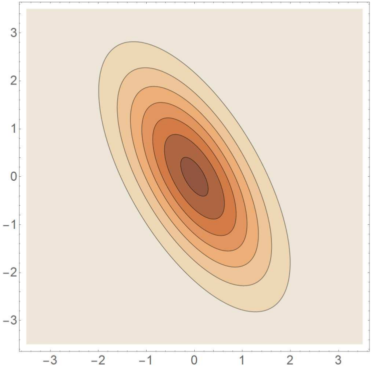


Eliptická (E-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **elipticky symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} A^{\mathsf{T}} Y + \theta$$

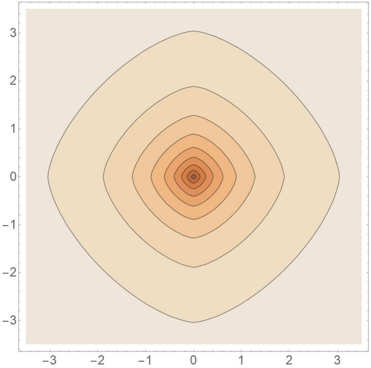
pre $Y \in \mathbb{R}^k$ sféricky symetrický, a $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$ hodnosti k $(\leq d)$.



Stredová (C-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **stredovo symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak

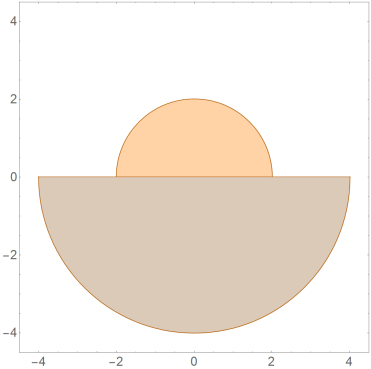
$$X - \theta \stackrel{\mathcal{D}}{=} -(X - \theta).$$



Angulárna (A-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ je **angulárne symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak (Liu, 1988)

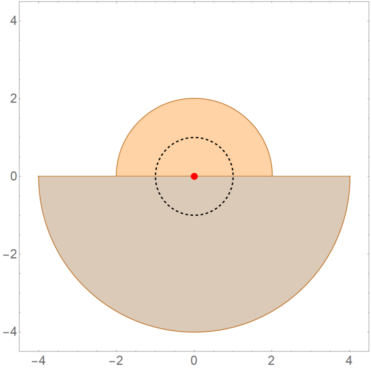
$$\frac{X-\theta}{\|X-\theta\|} \overset{\mathcal{D}}{=} -\frac{X-\theta}{\|X-\theta\|}. \qquad (\text{kde } 0/0 = 0)$$



Angulárna (A-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **angulárne symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak (Liu, 1988)

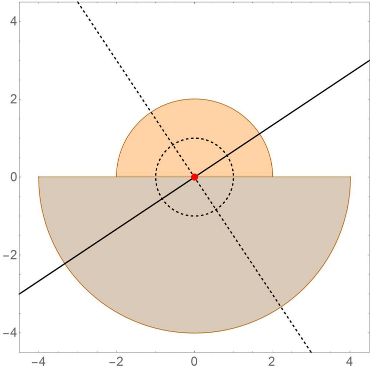
$$\frac{X-\theta}{\|X-\theta\|} \text{ je stredovo symetrický okolo } 0.$$



Polopriestorová (H-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **polopriestorovo symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak (Zuo a Serfling, 2000)

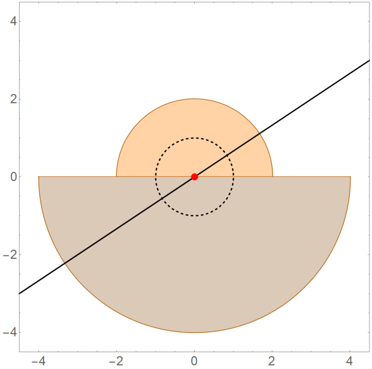
$$\langle \theta, u \rangle \text{ je mediánom } \langle X, u \rangle \text{ pre každé } u \in \mathbb{S}^{d-1}.$$



Polopriestorová (H-)symetria

$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **polopriestorovo symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak (Zuo a Serfling, 2000)

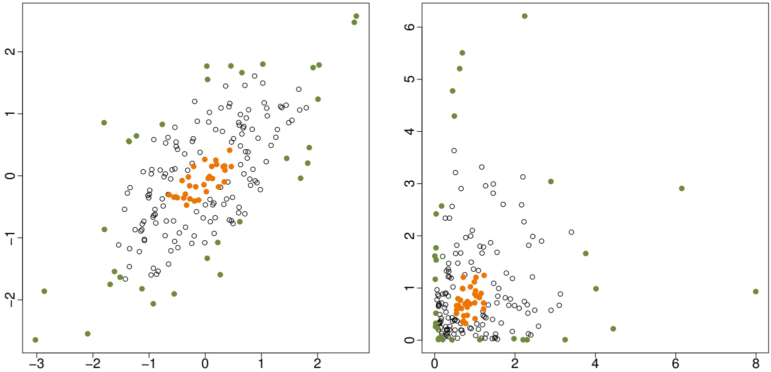
$$\inf_{H \in \mathcal{H}(\theta)} P(H) \geq 0.5$$



Polopriestorová hĺbka

Polopriestorová hĺbka (Tukey, 1975) pozorovania v $\mathbb{R}^d$

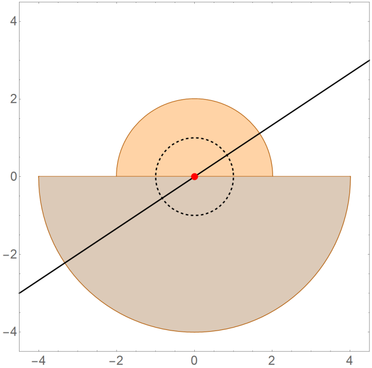
$$hD(x;P) = \inf_{H \in \mathcal{H}(x)} P(H).$$



Polopriestorová symetria a hĺbka

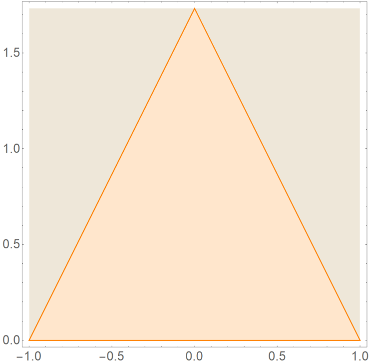
$X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je **polopriestorovo symetrický** okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$ ak (Zuo a Serfling, 2000)

$$hD(\theta; P) \geq 0.5$$



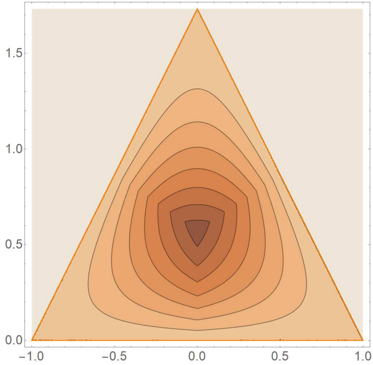
Nesymetrické rozdelenie

Rozdelenie ktoré **nie je polopriestorovo symetrické**



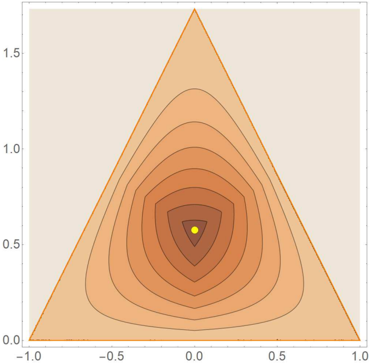
Nesymetrické rozdelenie

Rozdelenie ktoré **nie je polopriestorovo symetrické**



Nesymetrické rozdelenie

Rozdelenie ktoré **nie je polopriestorovo symetrické**



Vzťahy medzi konceptami symetrie

Tvrdenie (Zuo a Serfling, 2000)

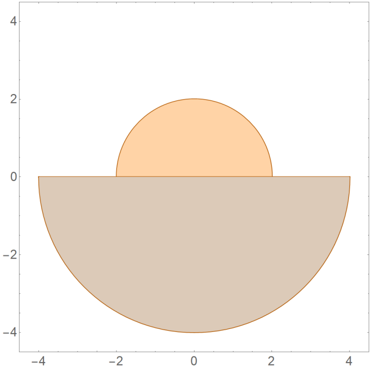
$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \supsetneq \textit{H-sym.} \supsetneq \textit{A-sym.} \supsetneq \textit{C-sym.} \supsetneq \textit{E-sym.} \supsetneq \textit{S-sym.}$$

Pre $d = 1$

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^1\right) = \textit{H-sym} \supsetneq \textit{A-sym.} \supsetneq \textit{C-sym.} = \textit{E-sym.} = \textit{S-sym.}$$

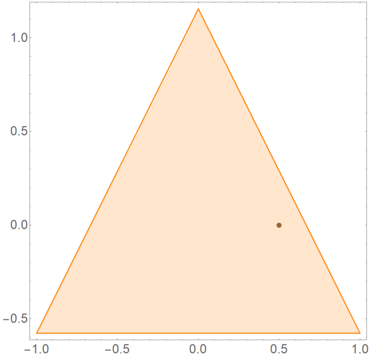
Obrátené implikácie

angulárna symetria $\not\Rightarrow$ stredová symetria



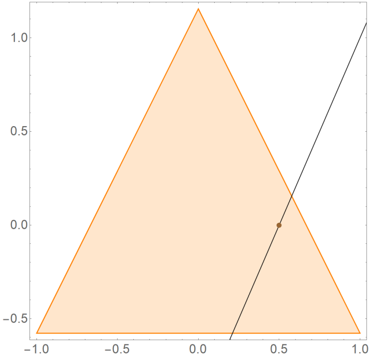
Obrátené implikácie

polopriestorová symetria $\not\Longrightarrow$ angulárna symetria



Obrátené implikácie

polopriestorová symetria $\not\Longrightarrow$ angulárna symetria



Angulárna a polopriestorová symetria

Tvrdenie (Zuo a Serfling, 2000, Veta 2.6)

Nech náhodný vektor X je polopriestorovo symetrický okolo jediného bodu $\theta \in \mathbb{R}^d$, a nech

1. *X je absolútne spojitý, alebo*
2. *X je diskrétny a $\mathrm{P}(X = \theta) = 0$.*

Potom X je angulárne symetrický okolo θ.

Stred symetrie $X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ **je jedinečný**, s výnimkou prípadu ak $d = 1$ a X má dva mediány.

Miery symetrie konvexných telies

Nech $\mathcal{K}^d$ je priestor konvexných telies v $\mathbb{R}^d$.

Definícia (Grünbaum, 1963)

Funkcia $s\colon \mathcal{K}^d \to [0,1]$ sa nazýva miera symetrie ak

- $s(K) = 1$ práve keď K je (stredovo) symetrické;
- $s(K) = s(T(K))$ pre každé $K \in \mathcal{K}^d$ a každú regulárnu afínnu transformáciu $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$;
- s je spojitá na $\mathcal{K}^d$.

Winternitzova miera symetrie

Definícia (Winternitz, 1917; Blaschke, 1923)

Pre $K \subset \mathcal{K}^d$, $x \in K$ a polopriestor $H \in \mathcal{H}(x)$, uvažujme

$$f(H,x) = \frac{\mathrm{vol}(K \cap H)}{\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K \cap H)}$$

a $f(x) = \min\{f(H,x) \colon H \in \mathcal{H}(x)\}$. Winternitzova miera symetrie telesa K je potom daná

$$F(K) = \max\{f(x) \colon x \in K\}.$$

Winternitzova miera symetrie

Definícia (Winternitz, 1917; Blaschke, 1923)

Pre $K \subset \mathcal{K}^d$, $x \in K$ a polopriestor $H \in \mathcal{H}(x)$, uvažujme

$$f(H,x) = \frac{\mathrm{vol}(K \cap H)}{\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K \cap H)}$$

a $f(x) = \min\{f(H,x) \colon H \in \mathcal{H}(x)\}$. Winternitzova miera symetrie telesa K je potom daná

$$F(K) = \max\{f(x) \colon x \in K\}.$$

$$f(x) = \frac{hD(x;K)}{1 - hD(x;K)}$$

Winternitzova miera symetrie

Definícia (Winternitz, 1917; Blaschke, 1923)

Pre $K \subset \mathcal{K}^d$, $x \in K$ a polopriestor $H \in \mathcal{H}(x)$, uvažujme

$$f(H,x) = \frac{\mathrm{vol}(K \cap H)}{\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K \cap H)}$$

a $f(x) = \min\{f(H,x) \colon H \in \mathcal{H}(x)\}$. Winternitzova miera symetrie telesa K je potom daná

$$F(K) = \max\{f(x) \colon x \in K\}.$$

Winternitzova miera symetrie je **hĺbka mediánu**.

Miery symetrie konvexných telies

Definícia (Grünbaum, 1963)

Funkcia $s\colon \mathcal{K}^d \to [0,1]$ sa nazýva miera symetrie ak

- $s(K) = 1$ práve keď K je (stredovo) symetrické;
- $s(K) = s(T(K))$ pre každé $K \in \mathcal{K}^d$ a každú regulárnu afínnu transformáciu $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$;
- s je spojitá na $\mathcal{K}^d$.

Funkova charakterizácia symetrie

Tvrdenie

Konvexné teleso $K \subset \mathbb{R}^d$ je stredovo symetrické práve keď

$$\sup_{x \in K} hD(x; K) = 1/2.$$

Funkova charakterizácia symetrie

Tvrdenie

Konvexné teleso $K \subset \mathbb{R}^d$ je stredovo symetrické práve keď

$$\sup_{x \in K} hD(x; K) = 1/2.$$

Okamžite dostávame

Tvrdenie

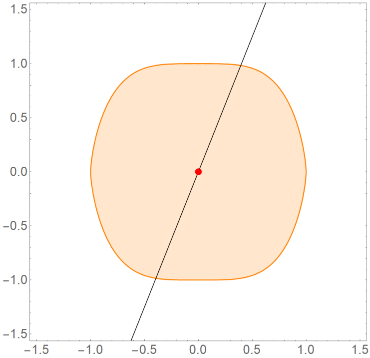
Konvexné teleso je H-symetrické $\iff$ je C-symetrické.

Porovnaj s

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right) \supsetneq \text{H-sym.} \supsetneq \text{A-sym.} \supsetneq \text{C-sym.} \supsetneq \text{E-sym.} \supsetneq \text{S-sym.}$$

Funkova charakterizácia symetrie

Konvexné teleso je H-symetrické $\iff$ je C-symetrické.



Funkova charakterizácia symetrie

Trochu histórie:

- pre $d = 2$ je problém **považovaný za triviálny**;
- pre $d = 3$ dokázal, a pre každé d predpokladal Paul Funk (1913);
- plne dokázal až Schneider (1970) použitím **funkcionálnych rovníc**;
- novšie dôkazy využívajú **sférickú integráciu** (Falconer, 1983);
- rozšírenia pomocou **sférických fourierových rád** (Groemer, 1996);
- **žiadny známy elementárny dôkaz** pre $d > 3$.

Angulárna a polopriestorová symetria

Tvrdenie (Zuo a Serfling, 2000, Veta 2.6)

Nech náhodný vektor X je polopriestorovo symetrický okolo jediného bodu $\theta \in \mathbb{R}^d$, a nech

1. *X je absolútne spojitý, alebo*
2. *X je diskrétny a $\mathrm{P}(X = \theta) = 0$.*

Potom X je angulárne symetrický okolo θ.

Angulárna a polopriestorová symetria

Tvrdenie (Zuo a Serfling, 2000, Veta 2.6)

Nech náhodný vektor X je polopriestorovo symetrický okolo jediného bodu $\theta \in \mathbb{R}^d$, a nech

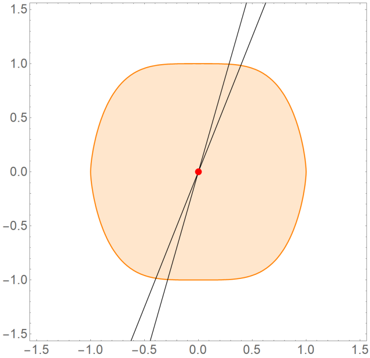
1. *X je absolútne spojitý, alebo*
2. *X je diskrétny a $\mathrm{P}(X = \theta) = 0$.*

Potom X je angulárne symetrický okolo θ.

Pre P rovnomerné na $K \in \mathcal{K}^d$ **implikuje Funkovu charakterizáciu!**

Dôkaz I (Zuo a Serfling, 2000)

Dôkaz iba pre $d = 2$, pre jednoduchosť (str. 73).



Angulárna a polopriestorová symetria II

Tvrdenie (Dutta et al., 2011, Veta 2)

Nech náhodný vektor X je polopriestorovo symetrický okolo $\theta \in \mathbb{R}^d$. Potom X je angulárne symetrický okolo θ.

Dôkaz II: Pre $d = 2$, všeobecný prípad je analogický.

- **Subhajit Dutta, Anil K. Ghosh, a Probal Chaudhuri. (2011).** Some intriguing properties of Tukey's half-space depth. *Bernoulli,* 17(4):1420–1434.

Angulárna a polopriestorová symetria III

Tvrdenie (Rousseeuw a Struyf, 2004, Veta 2)

Ak existuje bod $\theta \in \mathbb{R}^d$ *taký, že*

$$hD(\theta; P) = 1/2 + P(\{\theta\})/2,$$

potom $X \sim P$ *je angulárne symetrický okolo* θ.

Angulárna a polopriestorová symetria: dôkaz III

Pre každé d, s použitím iba **Cramér-Woldovej vety**

Tvrdenie (Cramér a Wold, 1936)

Rozdelenie $X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je jednoznačne určené všetkými svojimi jednorozmernými projekciami $\langle X, u \rangle$, $u \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Angulárna a polopriestorová symetria: dôkaz III

Pre každé d, s použitím iba **Cramér-Woldovej vety**

Tvrdenie (Cramér a Wold, 1936)

Rozdelenie $X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je jednoznačne určené všetkými svojimi jednorozmernými projekciami $\langle X, u \rangle$, $u \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Prvý elementárny dôkaz charakterizácie!

- **Peter J. Rousseeuw and Anja Struyf. (2004).** Characterizing angular symmetry and regression symmetry. *J. Stat. Plan. Inference,* 122(1-2):161–173.

Angulárna a polopriestorová symetria: dôkaz III

Pre každé d, s použitím iba **Cramér-Woldovej vety**

Tvrdenie (Cramér a Wold, 1936)

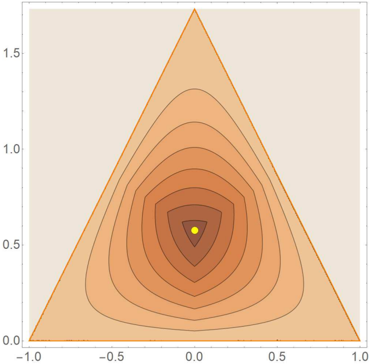
Rozdelenie $X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ je jednoznačne určené všetkými svojimi jednorozmernými projekciami $\langle X, u\rangle$, $u \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Prvý elementárny dôkaz charakterizácie!

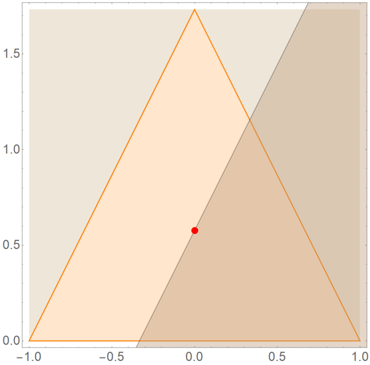
Problém (Nagy, 2018, Problém 5)

Platí rozšírenie vety pre spojité unimodálne rozdelenia? Konkávne miery?

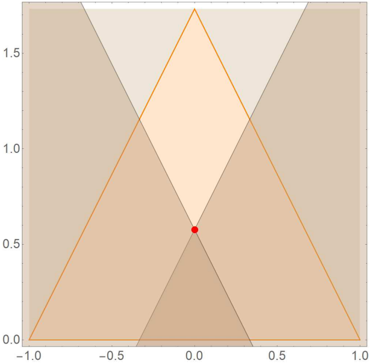
Hellyho veta pre hĺbkový medián



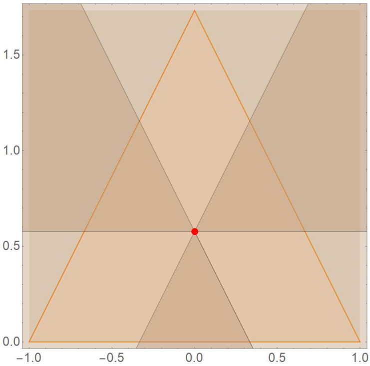
Hellyho veta pre hĺbkový medián



Hellyho veta pre hĺbkový medián



Hellyho veta pre hĺbkový medián



Winternitzova miera symetrie: ďalšie vlastnosti

Tvrdenie (Blaschke, 1923; Grünbaum, 1963)

Pre $K \in \mathcal{K}^d$ je $x \in K$ jeho polopriestorový medián $\Leftrightarrow$ existuje systém aspoň $d+1$ polopriestorov $\{H_i\}$ takých, že $\bigcup_i H_i = \mathbb{R}^d$, $x \in \bigcap_i H_i$, a

$$P(H_i) = hD(x;K) = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} hD(y;K).$$

Pre každý H_i je bod x centroidom $\partial H_i \cap K$.

- V hĺbke objavená až Donohom and Gasko (1992, p. 1819);
- opačná implikácia pre miery (Rousseeuw a Ruts, 1999).

Hellyho veta pre hĺbkový medián

Ďalšie rozšírenie

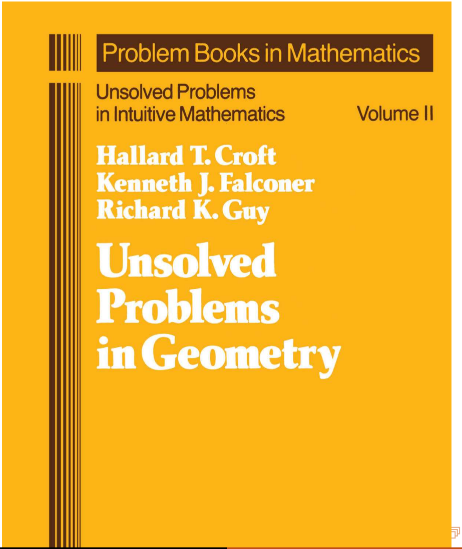
Tvrdenie (Hassairi a Regaieg, 2008, Veta 3.1)

Nech $X \sim P \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}^d\right)$ má spojitú hustotu, a nech $x \in \mathbb{R}^d$ a $H \in \mathcal{H}(x)$ sú také, že

$$hD(x;P) = P(H).$$

Potom $x = \mathrm{E}\left(X \middle| \partial H\right)$.

Hellyho veta pre hĺbkový medián



Hellyho veta pre hĺbkový medián

A8. Sections through the centroid of a convex body. Let K be a 3-dimensional convex body with centroid (i.e., center of gravity) $\mathbf{g}$. Is $\mathbf{g}$ necessarily the centroid of at least four plane sections of K through $\mathbf{g}$? Is it even the centroid of seven such sections, as is the case if K is a tetrahedron? More generally, if K is a d-dimensional convex body, is the centroid of K the centroid of $d + 1$ or even of $2^d - 1$ of the $(d - 1)$-dimensional sections through $\mathbf{g}$? When $d = 2$ this is easily seen to be so—in this case $\mathbf{g}$ bisects three chords of K. This question is due to Grünbaum and Loewner, see also the earlier paper by Steinhaus.

A consequence of Helly's theorem (see Section E1) is that *some* point of K is the centroid of at least $d + 1$ sections by hyperplanes. What can be said about the set of points of K enjoying this property? In the plane case Ceder showed that this set is connected, but not necessarily convex. Chakerian & Stein discuss other aspects of this problem.

Záver

Hlavné myšlienky:

- symetria mnohorozmerných rozdelení **nie je jednoduchá téma**;
- hĺbka existuje mimo štatistiku, **už dávno pred Tukeym (1975)**;
- **hĺbka mediánu** je prirodzená miera symetrie;
- množstvo príbuzných **otvorených problémov** (Nagy, 2018).
- Ďalšie čítanie: **Afínne invariantné body** (Grünbaum, 1963; Meyer et al., 2015, 2015b).

Záver

Viac informácií (a 17 otvorených problémov) na

`GeMS.karlin.mff.cuni.cz`

Úvodné stretnutie PRIMUS GeMS:

utorok **30.01.2018**, 09:00 – 13:00, Praktikum KPMS, MFF, UK