

Náhodné mozaiky

ZBYNĚK PAWLAS

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova

20. zimní škola JČMF ROBUST 2018

26. ledna 2018, Rybník

Obsah

(Deterministické) mozaiky

Náhodné mozaiky

Modely

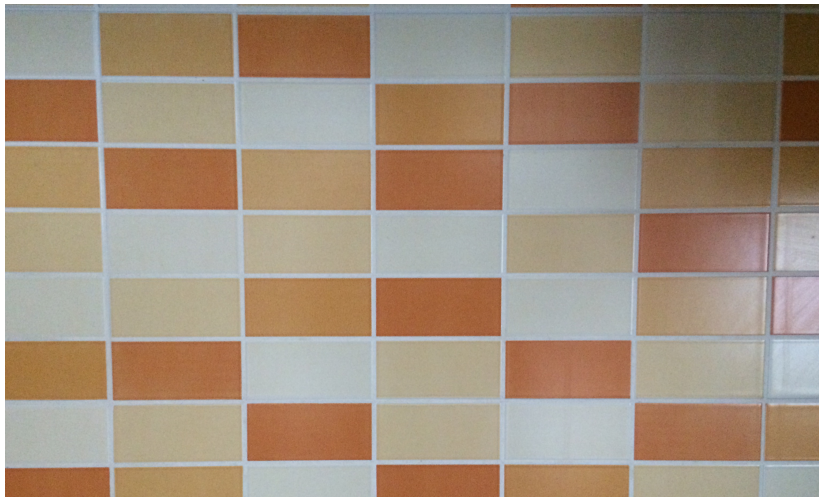
Statistika

Kótované mozaiky

Mozaika v umění



Mozaika v domácnosti



Mozaika v deskových hrách



Mozaika v Karlíně



Mozaika v matematice

mozaika ... lokálně konečné dělení \mathbb{R}^d na uzavřené d -rozměrné podmnožiny (**buňky**) s po dvou disjunktními vnitřky

mozaika $T = \{C_n\}$

- $C_n \subseteq \mathbb{R}^d$ uzavřená, $\text{int } C_n \neq \emptyset$,
- $\text{int } C_n \cap \text{int } C_m = \emptyset$ pro $n \neq m$,
- $\cup_n C_n = \mathbb{R}^d$,
- $\#\{n : C_n \cap K \neq \emptyset\} < \infty$ pro libovolnou kompaktní $K \subseteq \mathbb{R}^d$

\mathbb{T} ... systém všech mozaiek v \mathbb{R}^d

$\mathbb{T} \subseteq \mathcal{F}_{\text{if}}(\mathcal{F}')$... systém všech lokálně konečných množin neprázdných uzavřených množin

Mozaika konvexních kompaktních množin

$T = \{C_n\}$, C_n konvexní kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^d

Tvrzení: C_n jsou konvexní mnohostěny

Důkaz: existuje jen konečně mnoho $C_{i_1}, \dots, C_{i_m} \in T \setminus \{C_n\}$ takových, že $C_{i_j} \cap C_n \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, m$

pak $\partial C_n = \cup_{j=1}^m (C_{i_j} \cap C_n)$

C_n a C_{i_j} mají disjunkt ní neprázdné vnitřky, takže je lze oddělit nadrovinou H_{i_j}

$C_n \subseteq H_{i_j}^+$, $C_{i_j} \subseteq H_{i_j}^-$, $j = 1, \dots, m$

$$C_n = \bigcap_{j=1}^m H_{i_j}^+$$

C_n je průnik konečně mnoha uzavřených poloprostorů, tedy se jedná o konvexní mnohostěn

Stěny v konvexní mozaice

Buňky jsou konvexní mnohostěny.

Stěny konvexního mnohostěnu jsou jeho průniky s jeho opěrnými nadrovinami.

$\mathcal{F}^k(C_n)$... systém všech k -rozměrných stěn buňky C_n

$\mathcal{F}^k(T) = \cup_n \mathcal{F}^k(C_n)$... systém všech k -rozměrných stěn buněk mozaiky $T = \{C_n\}$

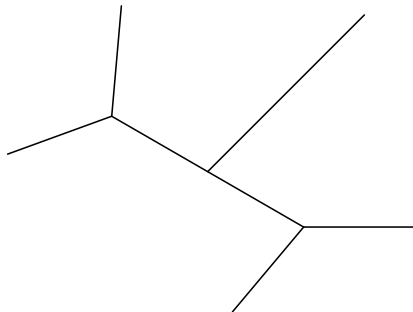
0-rozměrné stěny = **vrcholy**, 1-rozměrné stěny = **hrany**,
($d - 1$)-rozměrné stěny = **fasety**, d -rozměrné stěny = buňky

Stěnově sousední mozaiky

mozaika $T = \{C_n\}$ se nazývá **stěnově sousední**, když pro každé $n \neq m$

$$C_n \cap C_m \in \bigcup_{k=0}^d (\mathcal{F}^k(C_n) \cap \mathcal{F}^k(C_m)) \cup \{\emptyset\}$$

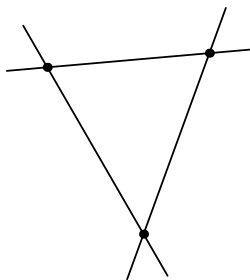
nepřipouštíme:



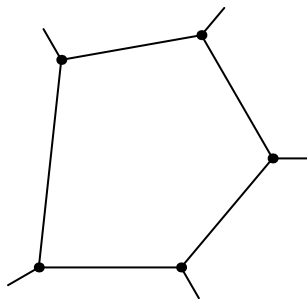
Normální mozaika

mozaika $T = \{C_n\}$ se nazývá **normální**, když je stěnově sousední a každá k -rozměrná stěna je obsažena v hranici právě $d - k + 1$ buněk, $k = 0, \dots, d - 1$

pro $F \in \mathcal{F}^k(T)$ existují $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d-k+1}}$ tak, že $F \subseteq \partial C_{i_j}$ pro $j \in \{1, \dots, d - k + 1\}$ a $F \not\subseteq \partial C_n$ pro $n \notin \{i_1, \dots, i_{d-k+1}\}$

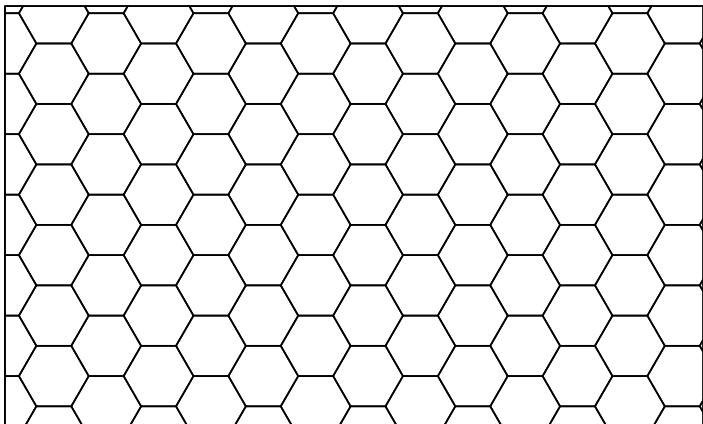


NE



ANO

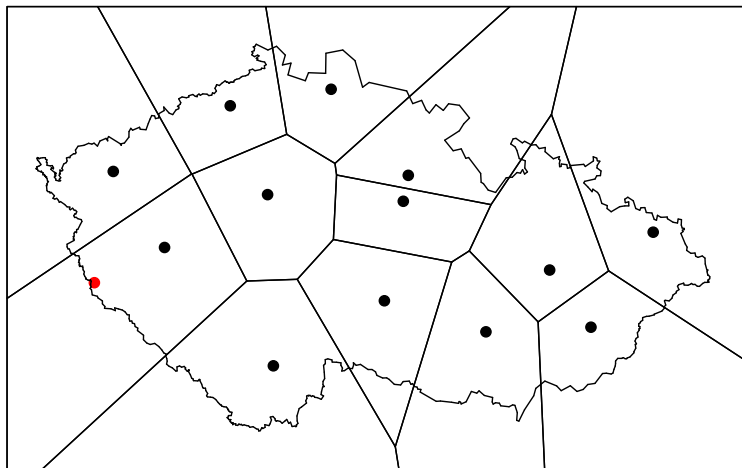
Šestiúhelníková mozaika



je normální

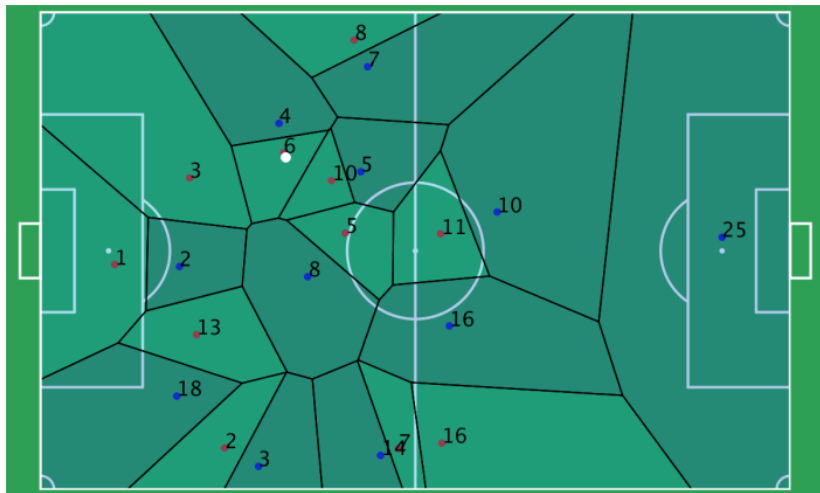
Dirichletova (nebo Voroného) mozaika (diagram)

Krajská města ČR



Dirichletova (nebo Voroného) mozaika (diagram)

Fotbalisti na hřišti



Voroného mozaika

$\{x_n\}$ lokálně konečný systém bodů v \mathbb{R}^d

Voroného buňka

$$C_n = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_n\| \leq \|y - x_k\| \forall k\}$$

$$C_n = \bigcap_{m \neq n} H_{n,m}^+$$

$$H_{n,m}^+ = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_n\| \leq \|y - x_m\|\}$$

Voroného mozaika

$$\mathcal{V}(\{x_n\}) = \{C_n\}$$

x_n ... jádro (generátor) buňky C_n

$$x_n \in C_n$$

Voroného mozaika je lokálně konečná

$$b(o, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}$$

$$N_r = \{n : C_n \cap b(o, r) \neq \emptyset\}$$

pro každé $n \in N_r$ existuje $y_n \in C_n \cap b(o, r)$

$$n_0 \in N_r$$

$$\begin{aligned}\|x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n\| \leq \|x_{n_0} - y_n\| + \|y_n\| \\ &\leq \|x_{n_0}\| + 2\|y_n\| \leq \|x_{n_0}\| + 2r\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_n \in b(o, \|x_{n_0}\| + 2r)$$

$b(o, \|x_{n_0}\| + 2r)$ obsahuje konečně mnoho bodů z $\{x_n\}$, takže N_r je konečná množina

Omezené buňky ve Voroného mozaice

postačující podmínka pro omezenost Voroného buněk je

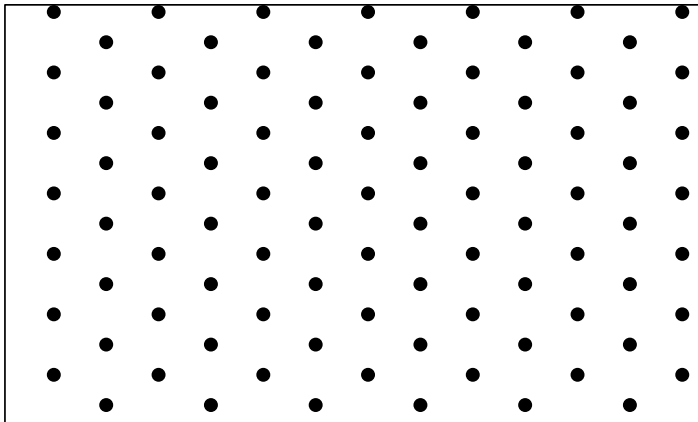
$$\text{conv}\{x_n\} = \mathbb{R}^d$$

Důkaz: kdyby buňka C_n příslušná x_n byla neomezená, pak $\{x_n + tu : t \geq 0\} \subseteq C_n$

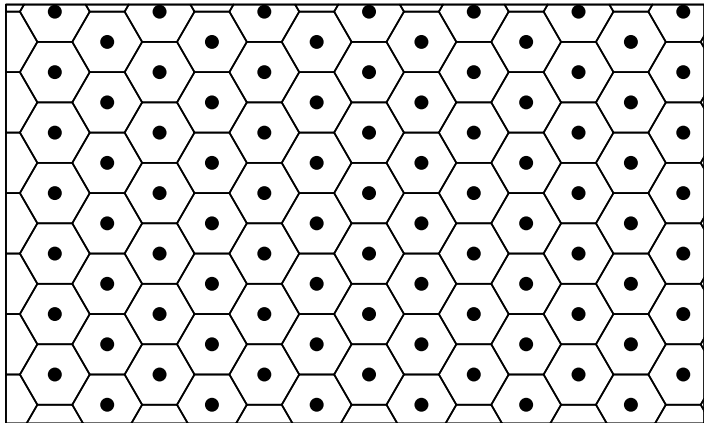
pro každé $t > 0$: $b(x_n + tu, t)$ obsahuje x_n na své hranici a žádné x_m ve svém vnitřku

$t \rightarrow \infty$: existuje otevřený poloprostor neobsahující žádný bod z $\{x_n\}$, což je ve sporu s $\text{conv}\{x_n\} = \mathbb{R}^d$

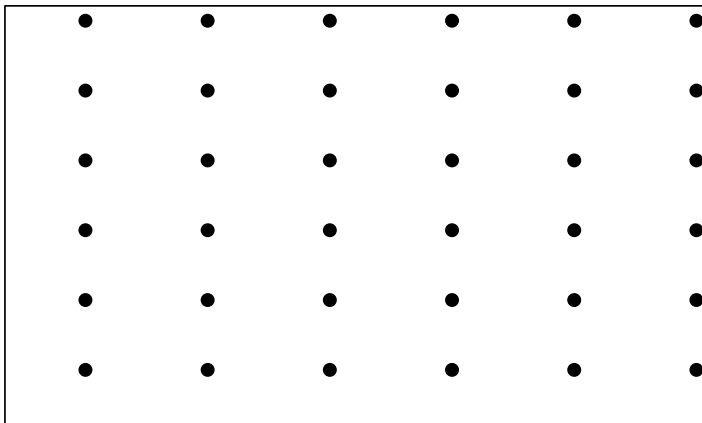
Pravidelná šestiúhelníková mřížka



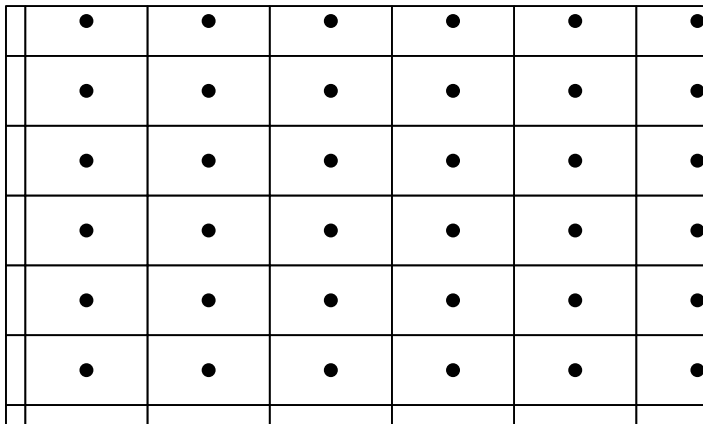
Voroného diagram generovaný šestiúhelníkovou mřížkou



Pravidelná obdélníková mřížka

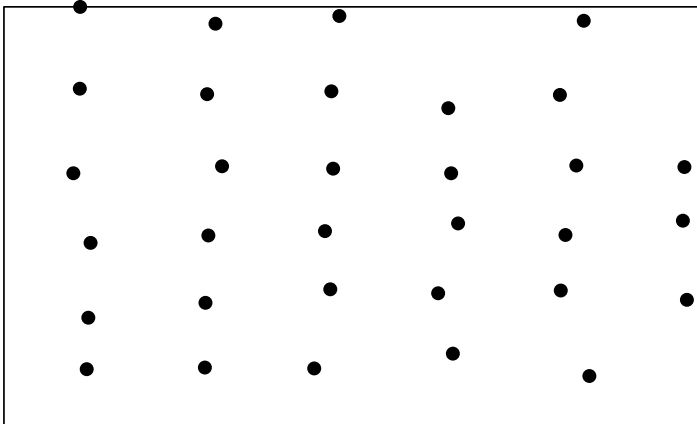


Voroného diagram generovaný obdélníkovou mřížkou

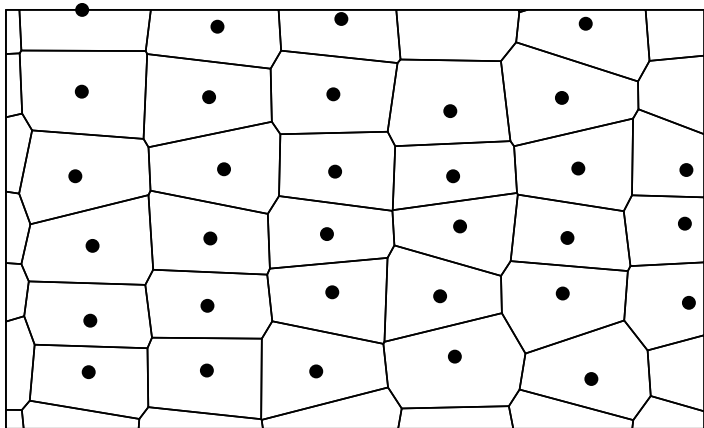


je stěnově sousední, není normální

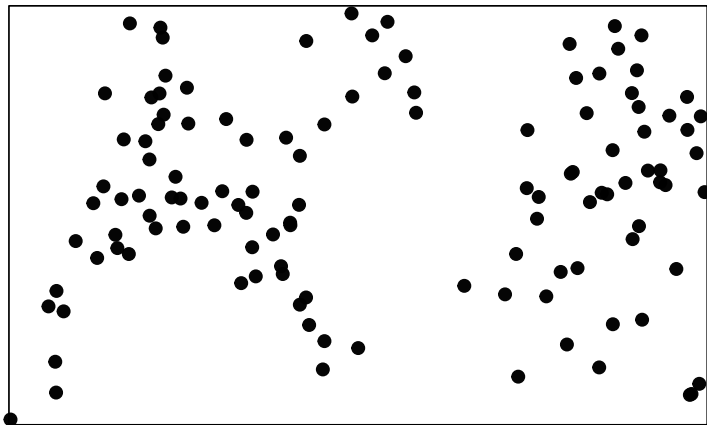
Regulárně rozmístěné body



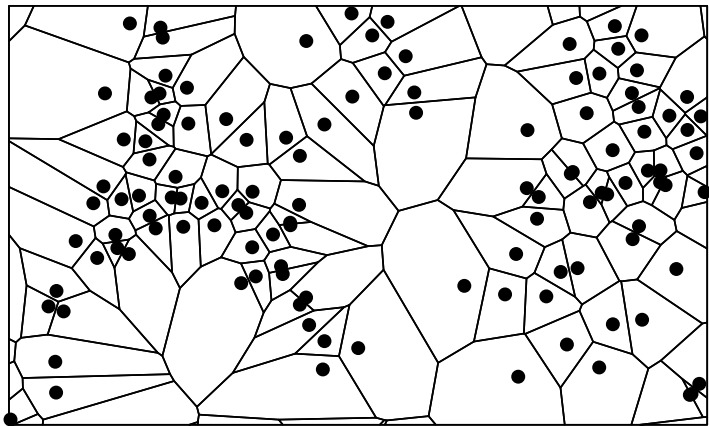
Voroného diagram generovaný regulárním vzorkem



Shlukovitě rozmístěné body



Voroného diagram generovaný shlukovým vzorkem



Vlastnosti Voroného mozaiky

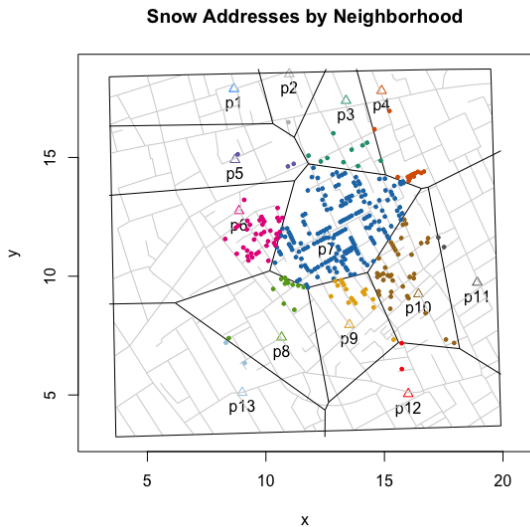
- je stěnově sousední
- je normální, pokud jsou generátory $\{x_n\}$ v **obecné kvadratické pozici**, tj.
 - ▶ žádných $d + 1$ neleží v $(d - 1)$ -rozměrném afinním podprostoru
 - ▶ a žádných $d + 2$ neleží na hranici sféry

Aplikace Voroného mozaiky

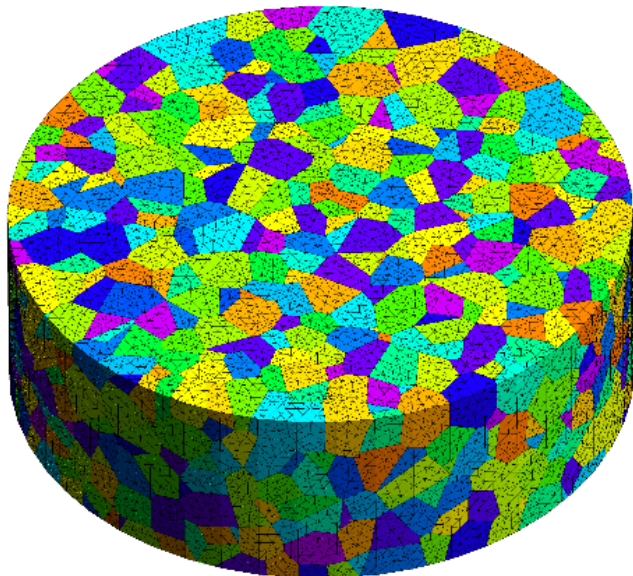
- ▶ matematika – Voroného aproximace, viz také poster Dana Hlubinky
- ▶ cytologie – buněčné struktury
- ▶ hydrologie – dešťové srážky v oblasti
- ▶ ekologie – modely pro šíření lesních požárů
- ▶ telekomunikace – zóny vlivu vysílačů
- ▶ počítačová grafika – reprezentace trojrozměrných geometrických objektů
- ▶ geologie – odhad zásob vzácných minerálů
- ▶ epidemiologie – výskyt nemoci a zdroj infekce
- ▶ materiálové vědy – mikrostruktura polykrystalů v kovových slitinách

Výskyt cholery v londýnské čtvrti Soho

J. Snow (1854) – vliv využívání dané pumpy s vodou



Slitina NiTi (FZÚ AV ČR)



Laguerreova mozaika

$\{x_n\}$ lokálně konečný systém bodů v \mathbb{R}^d

$\{r_n\}$ váhy příslušné bodům x_n

Laguerreova buňka

$$C_n = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_n\|^2 - r_n^2 \leq \|y - x_k\|^2 - r_k^2 \quad \forall k\}$$

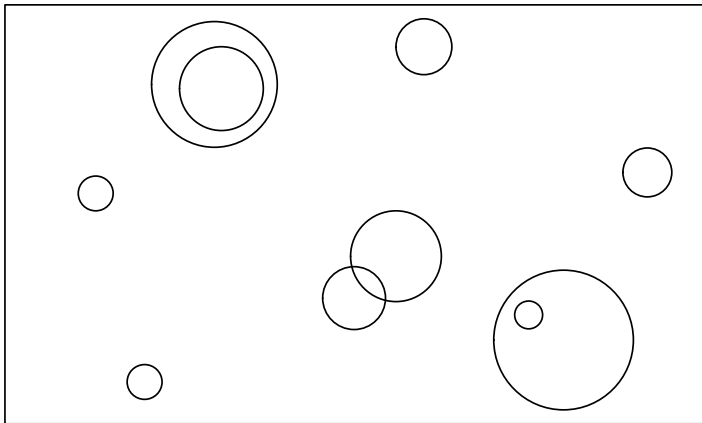
$$C_n = \bigcap_{m \neq n} H_{n,m}^+$$

$$\begin{aligned} H_{n,m}^+ &= \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_n\|^2 - r_n^2 \leq \|y - x_m\|^2 - r_m^2\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^d : 2\langle y, x_m - x_n \rangle \leq \|x_m\|^2 - \|x_n\|^2 + r_n^2 - r_m^2\} \end{aligned}$$

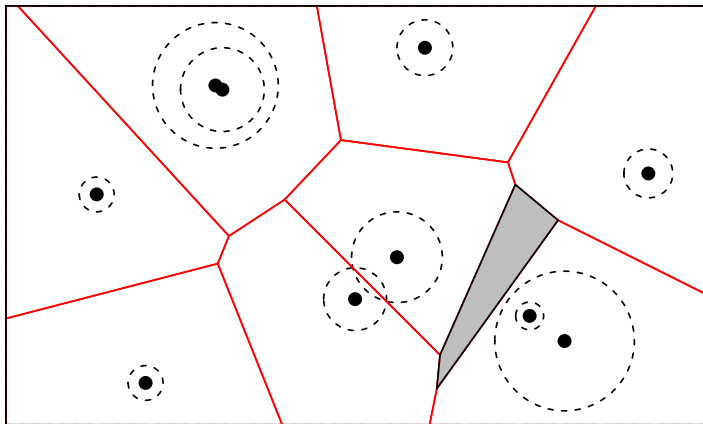
Laguerreova mozaika

$$\mathcal{L}(\{(x_n, r_n)\}) = \{C_n\}$$

Generátory



Výsledná Laguerreova mozaika



Vlastnosti Laguerreovy mozaiky

- buňky C_n jsou uzavřené konvexní množiny s disjunktími vnitřky

$$C_n = \bigcap_{m \neq n} H_{n,m}^+$$

- může se stát, že $x_n \notin C_n$
- dvojice (x_n, r_n) nemusí generovat žádnou buňku (pak nutně existuje (x_m, r_m) tak, že $b(x_n, r_n) \subseteq b(x_m, r_m)$)
- postačující podmínky na kompaktnost C_n a na to, aby byla stěnově sousední: $\text{conv}\{x_n\} = \mathbb{R}^d$ a pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a každé $t \in \mathbb{R}$ existuje jen konečně mnoho n tak, že $\|y - x_n\|^2 - r_n^2 \leq t$
- v případě $r_n = r \forall n$ jde o Voroného mozaiku
- pro $d \geq 3$ je každá normální mozaika Laguerreova

Mozaika generovaná systémem nadrovin

\mathbb{H}^d prostor všech nadrovin v \mathbb{R}^d neprocházejících počátkem
nadrovina kolmá na $tu \neq 0$ a obsahující tu :

$$H(u, t) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, u \rangle = t\}, \quad u \in \mathbb{S}^{d-1}, t > 0$$

$$\mathbb{H}^d \cong \mathbb{S}^{d-1} \times (0, \infty)$$

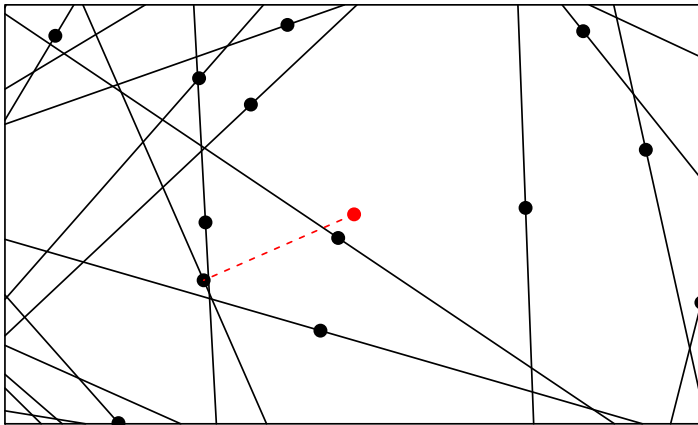
$\{H_n = H(u_n, t_n)\} \subseteq \mathbb{H}^d \dots$ lokálně konečný systém nadrovin

$$\mathcal{H}(\{H_n\}) = \{C_n\}$$

buňky \dots uzávěry souvislých otevřených komponent doplňku
sjednocení $\bigcup_n H_n$

systém $\{H_n\}$ je v **obecné pozici**, když každá k -rozměrná rovina
je obsažena v nejvýše $d - k$ nadrovinách systému $\{H_n\}$

Mozaika generovaná systémem přímek



Náhodné mozaiky

náhodný element Ξ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s hodnotami v prostoru $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{F}_{\text{lf}}(\mathcal{F}')$

pro $A, A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^d$ definujeme

$$\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k}^A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset, F \cap A_1 \neq \emptyset, \dots, F \cap A_k \neq \emptyset\}$$

topologie na prostoru $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$

$$\{\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_k}^K : K \text{ kompaktní, } G_1, \dots, G_k \text{ otevřené, } k \in \mathbb{N}_0\}$$

\mathcal{F}' je lokálně kompaktní prostor se spočetnou bází

stejným způsobem lze zavést topologii na $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$

$\mathcal{F}_{\text{lf}}(\mathcal{F}')$ je borelovská podmnožina $\mathcal{F}(\mathcal{F}')$

\mathbb{T} je borelovská podmnožina $\mathcal{F}_{\text{lf}}(\mathcal{F}')$

Příklady náhodných mozaiek

Poissonova-Voroného mozaika (PVT)

$\Phi = \{X_n\}$... Poissonův bodový proces v \mathbb{R}^d

$\Xi = \mathcal{V}(\Phi)$... Voroného mozaika s jádru $\{X_n\}$

Poissonova-Laguerreova mozaika (PLT)

$\Phi_m = \{(X_n, R_n)\}$... nezávisle kótovaný Poissonův bodový proces na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$

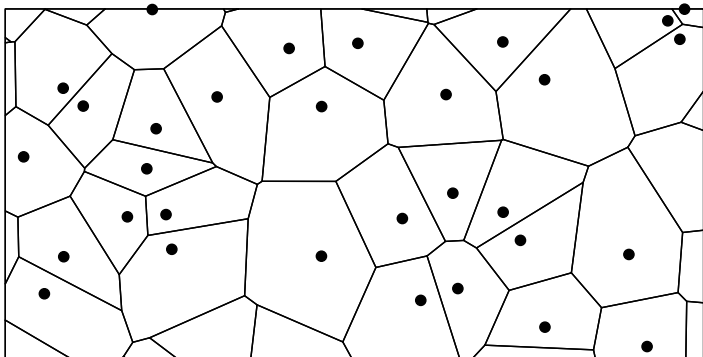
$\Xi = \mathcal{L}(\Phi_m)$... Laguerreova mozaika generovaná $\{(X_n, R_n)\}$

Mozaika generovaná Poissonovým procesem nadrovin (PHT)

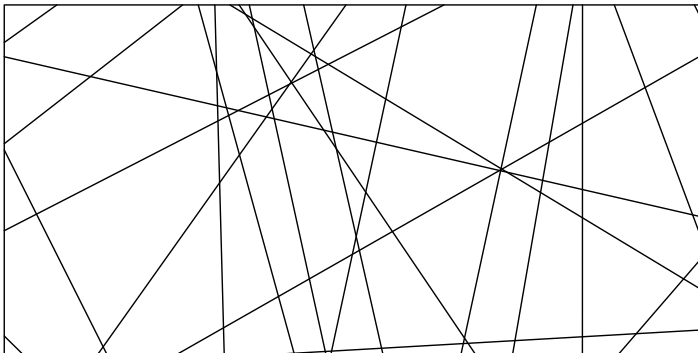
Ψ ... Poissonův proces na $\mathbb{H}^d \cong \mathbb{S}^{d-1} \times (0, \infty)$

$\Xi = \mathcal{H}(\Psi)$... mozaika generovaná procesem Ψ (pokud je v obecné pozici)

Poissonova-Voroného mozaika



Poissonova přímková mozaika



Náhodná mozaika jako kótovaný bodový proces

Každé neprázdné kompaktní množině K můžeme přiřadit **referenční bod** $c(K)$ měřitelným a translačně ekvivariantním způsobem, tedy $c(K + x) = c(K) + x$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Příklady: střed koule opsané množině K , těžiště, lexikografické minimum nebo maximum

$K = c(K) + (K - c(K)), \quad x = c(K), \quad K_0 = K - c(K)$
homeomorfismus $(x, K_0) \longleftrightarrow x + K_0$

kótovaný bodový proces na \mathbb{R}^d s prostorem kót tvořeným neprázdnými kompaktními množinami s referenčním bodem v počátku

$$\{X_n, \Xi_{0,n}\} \longleftrightarrow \{\Xi_n = X_n + \Xi_{0,n}\}$$

Stacionární mozaiky

$\Xi = \{\Xi_n\}$ náhodná mozaika s buňkami Ξ_n

Ξ se nazývá **stacionární**, pokud Ξ a $\Xi + x = \{\Xi_n + x\}$ mají stejné rozdělení pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$

Příklady:

stacionární Poissonova-Voroného mozaika $\Xi = \mathcal{V}(\Phi)$

Φ stacionární Poissonův bodový proces

stacionární Poissonova-Laguerreova mozaika $\Xi = \mathcal{L}(\Phi_m)$

Φ_m stacionární kótovaný Poissonův bodový proces

stacionární Poissonova mozaika nadrovin $\Xi = \mathcal{H}(\Psi)$

Ψ stacionární Poissonův proces na \mathbb{H}^d

Vlastnosti stacionárních mozaiek

- bodový proces $\{X_n = c(\Xi_n)\}$ je stacionární a tím pádem existuje λ_d (**intenzita**) tak, že

$$\mathbb{E}\#\{n : X_n \in B\} = \lambda_d |B|$$

- stacionární Poissonova-Voroného mozaika je normální s.j.
- stacionární Poissonova-Laguerreova mozaika existuje, pokud $\mathbb{E}R^d < \infty$, v tom případě jde o normální mozaiku s.j.
- stacionární Poissonova mozaika nadrovin je stěnově sousední, ale není normální

Nulová a typická buňka

$\{\Xi_n\}$ stacionární náhodná mozaika

fixujeme pevný bod (počátek o nebo jakýkoli jiný)

buňka Ξ_0 obsahující tento bod se nazývá **nulová buňka**

$$\Xi_n = X_n + \Xi_{0,n}, \quad X_n = c(\Xi_n)$$

rozdělení typické buňky

$$\mathbb{Q}(\mathcal{U}) = \frac{1}{\lambda_d |B|} \mathbb{E} \sum_{n: X_n \in B} \mathbf{1}\{\Xi_{0,n} \in \mathcal{U}\}$$

typická buňka $\tilde{\Xi}_0 \sim \mathbb{Q}$

$$\mathbb{E}f(\tilde{\Xi}_0) = \frac{1}{\mathbb{E}|\Xi_0|^{-1}} \mathbb{E} \frac{f(\Xi_0)}{|\Xi_0|}$$

Vztah mezi typickou a nulovou buňkou

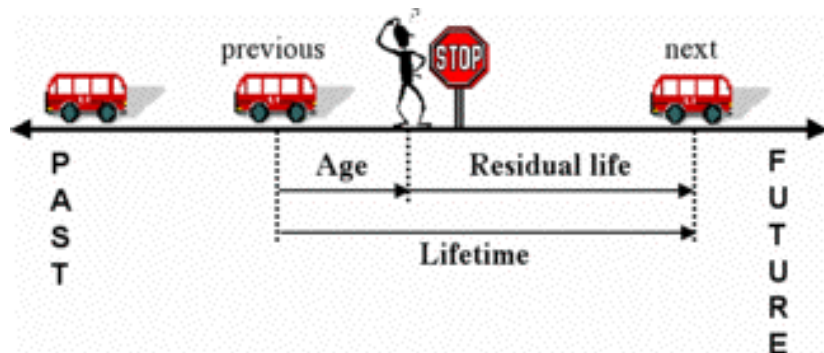
objem nulové buňky stochasticky dominuje objem typické buňky

$$\mathbb{P}(|\Xi_0| > t) \geq \mathbb{P}(|\tilde{\Xi}_0| > t), \quad t \geq 0$$

Důsledek:

$$\mathbb{E}|\Xi_0|^k \geq \mathbb{E}|\tilde{\Xi}_0|^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

Autobusový paradox



$\tilde{\Xi}_0$... interval mezi příjezdy autobusů

Ξ_0 ... interval mezi příjezdy obsahující dobu příchodu pasažéra na stanici

$$\frac{2}{\lambda} = \mathbb{E}|\Xi_0| \geq \mathbb{E}|\tilde{\Xi}_0| = \frac{1}{\lambda}$$

Konstrukce typické buňky

PVT

$\mathcal{V}(\Phi)$... stacionární Poissonova-Voroného mozaika

Φ ... stacionární Poissonův bodový proces

Tvrzení: Typická buňka $\mathcal{V}(\Phi)$ má stejné rozdělení jako nulová buňka $\mathcal{V}(\Phi \cup \{o\})$.

PHT

$\mathcal{H}(\Psi)$... stacionární Poissonův proces nadrovin

existuje konstrukce, která dává množinu se stejným rozdělením jako typická buňka

Náhodné míry generované konvexními mozaikami

$\Xi = \{\Xi_n\}$... náhodná mozaika s kompaktními konvexními buňkami

$\mathcal{F}^k(\Xi_n)$... systém všech k -rozměrných stěn buňky Ξ_n

$\mathcal{F}^k(\Xi) = \cup_n \mathcal{F}^k(\Xi_n)$... systém všech k -rozměrných stěn buněk mozaiky Ξ

0-rozměrné stěny = vrcholy, 1-rozměrné stěny = hrany,

$(d - 1)$ -rozměrné stěny = fasety, d -rozměrné stěny = buňky

$$\Psi^{(k,j)}(B) = \sum_{F \in \mathcal{F}^k(\Xi)} V_j(F \cap B)$$

$$k = 0, \dots, d, \quad j = 0, \dots, k$$

V_j ... j -tý vnitřní objem

Speciální volby

$$\Psi^{(k,j)}(B) = \sum_{F \in \mathcal{F}^k(\Xi)} V_j(F \cap B)$$

$$k = 0, \dots, d, \quad j = 0, \dots, k$$

$j = 0$: $\Psi^{(k,0)}(B)$... celkový počet všech k -rozměrných stěn protínajících B

$k = j = d - 1$: $\Psi^{(d-1,d-1)}(B)$... celkový povrch všech buněk v B

$$k = j = d: \Psi^{(d,d)}(B) = |B|$$

Ξ stacionární $\Rightarrow \Psi^{(k,j)}$ stacionární s intenzitou $\nu^{(k,j)}$

Bodové procesy asociované s mozaikami

$\Xi = \{\Xi_n\}$ stacionární náhodná mozaika

Φ_0 ... bodový proces vrcholů

Φ_1 ... bodový proces středů hran

Φ_k ... bodový proces středů k -rozměrných stěn

Φ_d ... bodový proces těžišť buněk

Φ_k jsou stacionární bodové procesy s intenzitami λ_k

$$\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \cdots + (-1)^d \lambda_d = 0$$

pro normální mozaiky:

$$(1 - (-1)^k) \lambda_k = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{d+1-j}{k-j} \lambda_j$$

$$k = 1: 2\lambda_1 = (d+1)\lambda_0$$

Vztahy mezi intenzitami

Rovinný případ ($d = 2$)

$$\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad 2\lambda_1 = 3\lambda_0$$

\implies

$$\lambda_0 = 2\lambda_2, \quad \lambda_1 = 3\lambda_2$$

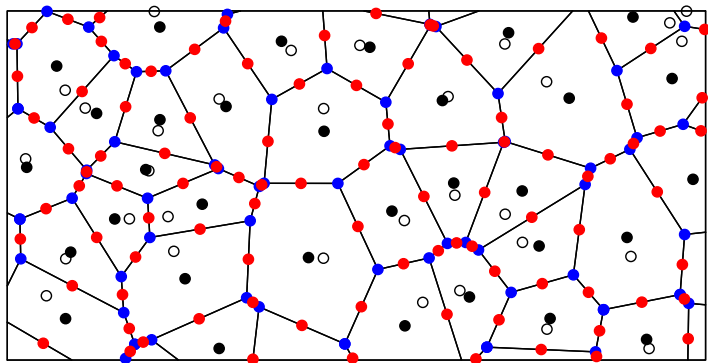
Prostorový případ ($d = 3$)

$$\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = 2\lambda_0, \quad 2\lambda_3 = 4\lambda_0 - 3\lambda_1 + 2\lambda_2$$

\implies

$$\lambda_1 = 2\lambda_0, \quad \lambda_2 = \lambda_0 + \lambda_3$$

Bodové procesy asociované s PVT



Intenzity pro PVT

Φ stacionární Poissonův bodový proces s intenzitou $\lambda > 0$

$\Xi = \mathcal{V}(\Phi)$ Poissonova-Voroného mozaika

$$\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1 + k/2)}$$

$$\kappa_d = \frac{2^d \pi^{d-1}}{d+1} \frac{\omega_{d^2}}{\omega_{d^2-1}} \left(\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} \right)^d$$

$$\lambda_0 = \lambda \kappa_d, \quad \lambda_d = \lambda$$

$d = 2$:

$$\lambda_0 = 2\lambda, \quad \lambda_1 = 3\lambda, \quad \lambda_2 = \lambda$$

střední celková délka hran na jednotku plochy:

$$\nu^{(1,1)} = 2\sqrt{\lambda}$$

Intenzity pro PHT

Ψ stacionární Poissonův proces nadrovin s intenzitou λ
a nedegenerovaným rozdělením směrů

$$\lambda_k = \binom{d}{k} \lambda_0, \quad k = 0, \dots, d$$

izotropní rozdělení směrů \Rightarrow

$$\lambda_0 = \frac{\omega_{d-1}^d}{d^d \omega_d^{d-1}} \lambda^d$$

$$\nu^{(k,j)} = \binom{d-j}{d-k} \binom{d}{j} \frac{\omega_{d-1}^{d-j}}{d^{d-j} \omega_d^{d-j-1} \omega_j} \lambda^{n-j}$$

$d = 2$:

$$\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda^2 / \pi, \quad \lambda_1 = 2\lambda_0, \quad \nu^{(1,1)} = \lambda$$

Statistická inference

převážná část výzkumu v oblasti náhodných mozaiek se zabývá matematickým modelováním a analýzou

statistickým aspektům nebylo dosud věnováno příliš pozornosti

Některé problémy:

- neparametrické odhady popisných charakteristik
- odhad parametrů modelu
- fitování vhodného modelu na data
- bayesovská rekonstrukce nepozorované mozaiky

Data: pozorování jedné realizace stacionární náhodné mozaiky v konvexním kompaktním okně $W \subseteq \mathbb{R}^d$

Odhady popisných charakteristik

1. odhad intenzit λ_k , $k = 0, \dots, d$

$$\widehat{\lambda}_k = \frac{\Phi_k(W)}{|W|}$$

je nestranný odhad λ_k

na W přímo pozorovatelné jen Φ_0 , příp. Φ_d při vhodné volbě referenčních bodů (např. lexikografické minimum)

u ostatních procesů $\Phi_1, \dots, \Phi_{d-1}$ problém s **okrajovými efekty**

2. odhad intenzit $\nu^{(k,j)}$

$$\widehat{\nu}^{(k,j)} = \frac{\Psi^{(k,j)}(W)}{|W|}$$

nenastává problém s okrajovými efekty

Odhady charakteristik typické buňky

3. odhad rozdělení \mathbb{Q} typické buňky

$$\widehat{\lambda_d \mathbb{Q}(\mathcal{U})} = \frac{1}{|W|} \sum_{n \in N^0(W)} \mathbf{1}\{\Xi_{0,n} \in \mathcal{U}\}$$

je nestranný odhad $\lambda_d \mathbb{Q}(\mathcal{U})$

obecněji můžeme odhadovat $\bar{\varphi}_0 = \mathbb{E}\varphi(\tilde{\Xi}_0) = \int \varphi(C) \mathbb{Q}(dC)$

$$\widehat{\lambda_d \bar{\varphi}_0} = \frac{1}{|W|} \sum_{n: X_n \in W} \varphi(\Xi_{0,n})$$

je nestranný odhad $\lambda_d \bar{\varphi}_0$

problém s okrajovými efekty

potřeba odhadnout λ_d

Typy výběru buněk

Nestranný výběr

uvažujeme ty buňky, které mají referenční bod v okně pozorování

$$N^0(W) = \{n : c(\Xi_n) \in W\}$$

$$|N^0(W)| = \Phi_d(W)$$

Minusový výběr

uvažujeme jen buňky, které jsou zcela obsaženy v pozorovacím okně

$$N^-(W) = \{n : \Xi_n \subseteq W\}$$

Odhady při nestranném a minusovém výběru

nestranný výběr

$$T^0(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{n \in N_0(W)} \varphi(\Xi_{0,n})$$

by byl nestranný odhad $\lambda_d \bar{\varphi}_0$, vyžaduje však informaci o $\varphi(\Xi_{0,n})$ pro všechny buňky s referenčním bodem uvnitř W
spec. $\varphi = 1$: dostáváme $|N_0(W)|/|W| = \Phi_d(W)/|W|$ odhad λ_d

minusový výběr

$$\frac{1}{|W|} \sum_{n \in N^-(W)} \varphi(\Xi_{0,n})$$

lze vyčíslit z informace v okně W , ale ve střední hodnotě podhodnocuje $\lambda_d \bar{\varphi}_0$

Odhad Horvitzova-Thompsonova typu

eroze množiny A množinou B

$$A \ominus B = \{x \in \mathbb{R}^d : B + x \subseteq A\}$$

$$T^-(W) = \sum_{n \in N^-(W)} \frac{\varphi(\Xi_{0,n})}{|W \ominus \Xi_{0,n}|}$$

je nestranný odhad $\lambda_d \bar{\varphi}_0$

Váhy $|W \ominus \Xi_{0,n}|$ odpovídají šanci, že buňka o tvaru jako $\Xi_{0,n}$ bude vybrána (je obsažena v okně W).

Asymptotická normalita odhadů

- zvětšující se okno W
- zvětšující se intenzita λ_d

$$\widehat{\lambda}_k = \frac{\Phi_k(W)}{|W|}$$

$$\widehat{\nu^{(k,j)}} = \frac{\Psi^{(k,j)}(W)}{|W|}$$

$$T^0(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{n \in N_0(W)} \varphi(\Xi_{0,n})$$

$$T^-(W) = \sum_{n \in N^-(W)} \frac{\varphi(\Xi_{0,n})}{|W \ominus \Xi_{0,n}|}$$

Asymptotická normalita pro stacionární PVT

1. odhad intenzity počtu vrcholů λ_0

$$\text{var } \widehat{\lambda}_0 \sim \sigma^2 / |W|$$

$$\text{limitní rozptyl } \sigma^2 = \lambda_0(1 + \kappa_d \sigma_d^2)$$

σ_d^2 konstanta závisující jenom na d (lze vyjádřit pomocí několikanásobného integrálu)

$$d = 2: \sigma_2^2 = 1/2, \sigma^2 = 4\lambda$$

$$d = 3: \sigma_3^2 \doteq 5,084, \sigma^2 \doteq 239,578\lambda$$

2. odhad $\nu^{(k,j)}$

L. HEINRICH (1994), L. HEINRICH A L. MUCHE (2008)

Důkaz: β -mixing koeficienty klesají exponenciálně, CLV pro β -mixing náhodná pole

Metoda stabilizace

Φ bodový proces, $X \in \Phi$ bod procesu, skórová funkce $\xi(X, \Phi)$ **poloměrem stabilizace** nazveme nezápornou náhodnou veličinu $R = R^\xi(X, \Phi)$ takovou, že

$$\xi(X, \Phi \cap b(X, R)) = \xi(X, (\Phi \cap b(X, R)) \cup (A \cap b(X, R)^c))$$

pro každou lokálně konečnou množinu $A \subseteq \mathbb{R}^d$

Věta: Je-li Φ Poissonův bodový proces, $R^\xi(X, \Phi)$ má exponenciálně klesající chvosty a je splněna následující momentová podmínka

$$\sup_W \sup_{x, y \in W} \mathbb{E} |\xi(x, (\Phi \cap W) \cup \{y\})|^p < \infty,$$

pak platí centrální limitní věta pro

$$\sum_{X \in \Phi \cap W} \xi(X, \Phi).$$

M. D. PENROSE A J. YUKICH (2001), R. LACHIEZE-REY, M. SCHULTE A J. YUKICH (2017)

Stabilizace pro stacionární PVT

prostor \mathbb{R}^d rozdělíme na konvexní kužele K_1, \dots, K_I se středem v počátku o a dostatečně malým úhlem

v každém kuželi najdeme bod X_i procesu Φ , který je nejbližší počátku

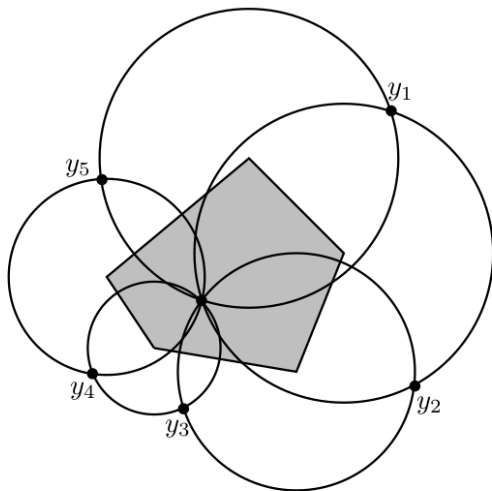
položíme $D = \max_{i=1, \dots, I} \|X_i\|$

jednoduchým geometrickým argumentem se dá ukázat, že Voroného buňka příslušná o je obsažena v kouli o poloměru D přidání bodu ve vzdálenosti větší než $R = 2D$ neovlivní tvar této buňky

navíc

$$\mathbb{P}(D \geq t) \leq \sum_{i=1}^I \mathbb{P}(\|X_i\| \geq t) = \sum_{i=1}^I \mathbb{P}(\Phi(b(o, t) \cap K_i) = 0) = I \cdot e^{-ct^d}$$

Voroného květina



Stabilizace pro stacionární PLT

Poissonova-Laguerreova mozaika generovaná kótovaným procesem $\{(X_n, R_n)\}$

předp. $R_n \leq r_{\max}$

pak lze podobnými argumenty najít poloměr stabilizace R takový, že

$$\mathbb{P}(R \geq t) \leq c_1 e^{-c_2 t^d}$$

Asymptotická normalita pro PVT a PLT

metodou stabilizace dostaneme asymptotickou normalitu odhadů $\widehat{\nu^{(k,j)}}$, $T^0(W)$

F. AVRAM A D. BERTSIMAS (1993) – PVT, $d = 2$, $\widehat{\nu^{(1,1)}}$
M. D. PENROSE A J. YUKICH (2001)

při studiu

$$T^-(W) = \sum_{n \in N^-(W)} \frac{\varphi(\Xi_{0,n})}{|W \ominus \Xi_{0,n}|}$$

je třeba ošetřit malé hodnoty $|W \ominus \Xi_{0,n}|$ ve jmenovateli (nastávají pro velké buňky)

limitní rozptyly může být komplikované vyjádřit

Řád konvergence pro PVT

Φ ... stacionární Poissonův proces

funkcionál Φ

odhad Kolmogorovovy nebo Wassersteinovy vzdálenosti

lze použít na $\widehat{\nu^{(k,j)}}$

G. LAST, G. PECCATI A M. SCHULTE (2016)

Důkaz: kombinace Steinovy metody a Malliavinova kalkulu

Počet vrcholů PHT

Ψ stacionární Poissonův proces nadrovin

$$\Xi = \mathcal{H}(\Psi)$$

- $\text{var } \widehat{\lambda}_0 \sim \sigma^2 / |W|^{1/d}$
- asymptotická normalita

K. PAROUX (1998) – metoda momentů ($d = 2$)

L. HEINRICH, H. SCHMIDT A V. SCHMIDT (2006) –
Hoeffdingův rozklad U -statistik

Celkový k -rozměrný povrch k -rozměrných stěn PHT

Ψ stacionární Poissonův proces nadrovin

$$\Psi^{(k,j)}(B) = \sum_{F \in \mathcal{F}^k(\Xi)} V_j(F \cap B)$$

- $\text{var } \widehat{\nu}^{(k,0)} \sim \sigma^2 / |W|^{(2k+1)/d}$
- $\text{var } \widehat{\nu}^{(k,k)} \sim \sigma^2 / |W|^{1/d}$
- asymptotická normalita

L. HEINRICH, H. SCHMIDT A V. SCHMIDT (2006) –
Hoeffdingův rozklad U -statistik

Celkové vnitřní objemy pro PHT

Ψ stacionární Poissonův proces nadrovin v \mathbb{R}^d
s nedegenerovaným rozdělením směrů

M. REITZNER A M. SCHULTE (2013)

horní mez Wassersteinovy vzdálenosti

Důkaz: kombinace Steinovy metody a Malliavinova kalkulu

Odhad parametru PVT

$\Xi = \mathcal{V}(\Phi)$ stacionární Poissonova-Voroného mozaika
jediný parametr: λ = intenzita stacionárního Poissonova
bodového procesu Φ

několik přirozených způsobů odhadu λ (případ $d = 2$):

1. na základě odhadu λ_0 a vztahu $\lambda_0 = 2\lambda$
2. na základě odhadu $\nu^{1,1}$ a vztahu $\nu^{(1,1)} = 2\sqrt{\lambda}$
3. na základě odhadu λ_2 a vztahu $\lambda_2 = \lambda$

Odhad parametrů Poissonovy-Laguerreovy mozaiky

uvažujeme několik geometrických charakteristik buněk

$\hat{c} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_q)$ vektor charakteristik odhadnutý z dat

$c = (c_1, \dots, c_q)$ vektor stejných charakteristik modelu

metoda minimálního kontrastu

$$d(\hat{c}, c) = \sum_{i=1}^q \left(\frac{\hat{c}_i - c_i}{c_i} \right)^2$$

hledáme takový model, který minimalizuje $d(\hat{c}, c)$

některé hodnoty potřeba získat numericky

Další témata

Jiné typy mozaiek

Voroného mozaiky založené na jiných než Poissonových bodových procesech

- bodové procesy splňující jisté β -mixing podmínky
- binomický bodový proces
- jistá třída gibbsovských modelů

Asymptotika pro jiné charakteristiky

- tvar velkých buněk
- kóty asociované buňkám

Projekt GAČR

Parametrická reprezentace a stochastické 3D modelování mikrostruktury zrn polykrystalických materiálů s užitím kótovaných náhodných mozaik



Kótovaná mozaika

dodatečná informace asociovaná s každou buňkou

$T_m = \{(C_n, m_n)\}$ nazveme **kótovanou mozaikou**, pokud $\{C_n\}$ je mozaika a $\{m_n\}$ je rodina kót z prostoru \mathbb{M}

$\mathbb{T}_m \dots$ systém všech kótovaných mozaiek v \mathbb{R}^d s kótami v \mathbb{M}

$$\mathbb{T}_m \subseteq \mathcal{F}_{\text{lf}}(\mathcal{F}' \times \mathbb{M})$$

náhodná kótovaná mozaika $\{\Xi_n, M_n\}$ je náhodný element s hodnotami v prostoru \mathbb{T}_m

$$\Xi_m = \{(\Xi_n, M_n)\}$$

Ξ_m je **stacionární**, když má stejné rozdělení jako $\{\Xi_n + x, M_n\}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$

Příklady kót

Geometrické charakteristiky

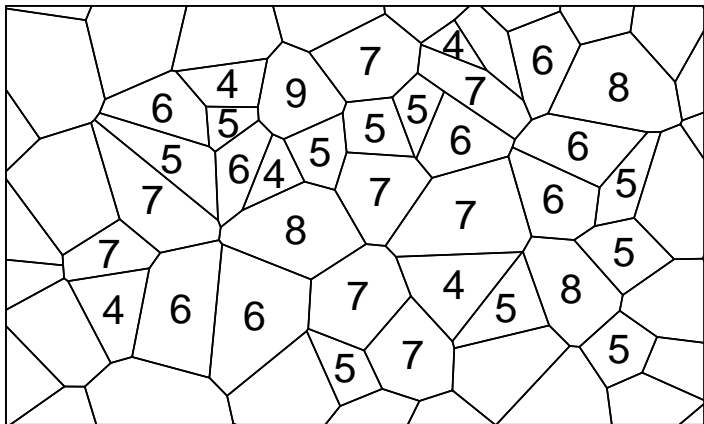
$$M_n = \sum_{F \in \mathcal{F}^k(\Xi_n)} V_j(F)$$

počet vrcholů, počet k -rozměrných stěn, délka hran, objem buňky, ...

Fyzikální veličiny

- krystalografická orientace
- tenzor napětí, elasticity

Počty vrcholů



Odhady typické buňky a kóty

sdružené rozdělení typické buňky a kóty

$$Q_m(\mathcal{U}) = \frac{1}{\lambda_d |B|} \mathbb{E} \sum_{n: X_n \in B} \mathbf{1}\{(\Xi_{0,n}, M_n) \in \mathcal{U}\}$$

odhady φ -hustoty $\bar{\varphi}_0 = \int \varphi(C, m) Q(d(C, m))$

$$T^0(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{n \in N_0(W)} \varphi(\Xi_{0,n}, M_n)$$

$$T^-(W) = \sum_{n \in N^-(W)} \frac{\varphi(\Xi_{0,n}, M_n)}{|W \ominus \Xi_{0,n}|}$$

asymptotické chování pro různé modely kótování

Analýza polykrystalických dat

elastická deformace NiTi drátu

nařazená Laguerreova mozaika

kolem 2500 buněk

Cíl: kvantifikovat korelace mezi tenzorem napětí a krystalickou orientací mřížky jednotlivých buněk

Děkuji za pozornost!



matfyz