Cvičení 11 – Podgrupy, Lagrangeova věta

16. prosince 2025

Příklad 1. Rozhodněte, zda je H podgrupa G a pokud ano, určete index $[G\colon H]$ a všechny levé rozkladové třídy G podle H, jestliže:

a) $G = \mathbb{Z}_{12}$ a $H = \{0, 3, 6, 9\}$,

b) $G = \mathbb{Z}_{10}$ a $H = \{0, 3, 6, 9\}$,

c) $G = S_3$ a $H = \{\mathrm{id}, (1\,2), (2\,3)\}$,

d) $G = S_3$ a $H = \{\mathrm{id}, (1\,2)\}$,

e) $G = D_{10}$ a $H = \{\mathrm{id}, \text{libovolná reflexe}\}$,

f) $G = D_{10}$ a $H = \{\mathrm{id}, \text{všechny reflexe}\}$,

Příklad 2. Rozhodněte zda platí:

a) v grupě $\mathbb{Z}_{30}$ podgrupy řádu $4, 5, 6$,

b) v grupě S_{17} prvky řádu $71, 72, 80$.

Příklad 3. Najděte nejmenší podgrupu grupy S_5, která obsahuje prvek $\pi = (1\,2\,3\,4\,5)$. Jakého je řádu a jakého indexu?

Příklad 4. Buď G grupa řádu 60, $H \leq G$ řádu 5 a $K \leq G$ indexu 5. Je $H \cap K$ komutativní? Změní se odpověď, pokud řád H bude 10?

Příklad 5. Uvažme grupu $(\mathbb{Q}, +)$. Ukažte, že:

a) v ní mají každé dvě netriviální podgrupy netriviální průnik,

b) ji nelze generovat jedním prvkem (dokonce ani žádnou konečnou podmnožinou).

Příklad 6. Určete, ve kterých z následujících grup tvoří sudá čísla podgrupu: $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{15}, \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_{15}^*, \mathbb{Z}_{16}^*$.

Příklad 7. Rozhodněte, zda:

a) $\{\pi \in A_4 \colon \pi^2 = \mathrm{id}\} \leq A_4$,

b) $\{\pi \in A_4 \colon \pi^3 = \mathrm{id}\} \leq A_4$,

c) $\{\pi \in S_4 \colon \pi^2 = \mathrm{id}\} \leq S_4$,

d) $\{\pi \in S_4 \colon \pi^3 = \mathrm{id}\} \leq S_4$.

Příklad 8. Ukažte, že platí:

a) $\langle 1 \rangle_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle_{\mathbb{Q}}$,

b) $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

c) $\langle a, b \rangle = \langle \mathrm{NSD}(a, b) \rangle = \mathrm{NSD}(a, b)\mathbb{Z}$,

d) $S_n = \langle (1\,2), (1\,3), \ldots, (1\,n) \rangle$,

e) $A_n = \langle (1\,2\,3), (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n) \rangle$.

f) $D_{2n} = \langle \rho, \sigma \rangle$, kde ρ je rotace o $\frac{2\pi}{n}$ a σ je libovolná reflexe.

Příklad 9. Mějme konečnou grupu G a dvě disjunktní podmnožiny A, B uzavřené na násobení 3 prvků (tj. pro $a, b, c \in A$ platí $abc \in A$), takové, že $G = A \cup B$. Ukažte, že jedna z množin A, B je podgrupa G.

Domácí úkol. Mějme konečnou grupu G. Dokažte, že existuje generující množina velikosti nejvýše $\log_2(|G|)$.