I. Úvod

I.1. Množiny

***Množinou** rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých objektů do jediného celku.*

- $x \in A$ ... x je prvkem množiny A
- $x \notin A$ ... x není prvkem množiny A
- $A \subset B$ ... množina A je podmnožinou množiny B (*inkluze*)
- $A = B$ ... množiny A a B mají stejné prvky; platí $A \subset B$ a zároveň $B \subset A$
- $\emptyset$ ... prázdná množina
- $A \cup B$ ... sjednocení množin A a B
- $A \cap B$ ... průnik množin A a B
- disjunktní množiny ... A a B jsou disjunktní, pokud $A \cap B = \emptyset$
- $A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$ ... rozdíl množin A a B
- $A_1 \times \cdots \times A_m = \{[a_1, \ldots, a_m];\ a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m\}$ ... kartézský součin

Nechť I je nějaká neprázdná množina indexů a mějme systém množin A_α, kde indexy α probíhají I.

- $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ... množina všech prvků, které patří alespoň do jedné z množin A_α
- $\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ ... množina prvků, které náleží do každé z množin A_α

I.2. Výroková logika

Výrok a logické spojky

Výrok je tvrzení, o němž má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé.

- $\neg$, též non ... *negace*
- $\&$ (někdy též $\wedge$) ... *konjunkce*, logické „a“
- $\vee$ ... *disjunkce* (alternativa), logické „nebo“
- $\Rightarrow$ ... *implikace*
- $\Leftrightarrow$ ... *ekvivalence*

Příklady „vždy pravdivých výroků“

Následující složené výroky jsou pravdivé nezávisle na pravdivosti výroků A, B, C:

- $A \vee \neg A$ (vyloučení třetí možnosti)
- $\neg(A \ \&\ \neg A)$
- $\big((A \ \&\ B) \ \&\ C\big) \Leftrightarrow \big(A \ \&\ (B \ \&\ C)\big)$
- $\neg(A \ \&\ B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \ \&\ \neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \ \&\ \neg B)$
- $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \ \&\ (B \Rightarrow A)\big)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Výrokové formy

Buď M množina. Tvrzení s proměnnou $x \in M$ je *výroková forma*, pokud po dosazení libovolného prvku množiny M za x vznikne výrok.

Obecný zápis:

$$V(x), x \in M$$

$$V(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in M_1, \ldots, x_n \in M_n$$

Příklad. $n > 5$, $n \in \{1, 3, 5, 7\}$ je výroková forma. Po dosazení $n = 7$ získáme pravdivý výrok, po dosazení $n = 5$ získáme nepravdivý výrok.

Kvantifikátory

Je-li $A(x)$, $x \in M$ výroková forma, pak výrok „Pro všechna x z M platí $A(x)$." zapisujeme

$$\forall x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme

$$\exists x \in M\colon A(x).$$

Výrok „Existuje jediné x z M, pro které platí $A(x)$." zapisujeme

$$\exists! x \in M\colon A(x).$$

Jsou-li $A(x)$, $x \in M$ a $B(x)$, $x \in M$ výrokové formy, pak

$$\forall x \in M, B(x)\colon A(x) \quad \text{znamená} \quad \forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A(x)),$$

$$\exists x \in M, B(x)\colon A(x) \quad \text{znamená} \quad \exists x \in M\colon (A(x) \;\;\&\;\; B(x)).$$

Negace výroků s kvantifikátory:

$$\neg(\forall x \in M\colon A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \exists x \in M\colon \neg A(x),$$

$$\neg(\exists x \in M\colon A(x)) \quad \text{je totéž co} \quad \forall x \in M\colon \neg A(x).$$

I.3. Zobrazení

Definice. Nechť A a B jsou množiny. *Zobrazením f množiny A do množiny B* nazveme předpis, kterým každému prvku x množiny A přiřadíme jediný prvek y z množiny B. Tento prvek y značíme symbolem $f(x)$. Prvek y se pak nazývá *obrazem* prvku x, prvek x se nazývá *vzorem* prvku y.

- Symbolem $f\colon A \to B$ značíme, že f je zobrazením množiny A do množiny B.
- Symbolem $f\colon x \mapsto f(x)$ značíme, že zobrazení f přiřazuje prvku x prvek $f(x)$.
- Množinu A z definice zobrazení nazýváme *definičním oborem zobrazení* f a značíme ji symbolem D_f.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je zobrazení.

- Podmnožina $G_f = \{[x, y] \in A \times B;\; x \in A, y = f(x)\}$ kartézského součinu $A \times B$ se nazývá *grafem zobrazení* f.
- *Obrazem* množiny $M \subset A$ při zobrazení f se nazývá množina

$$f(M) = \{y \in B;\; \exists x \in M\colon f(x) = y\} \quad (= \{f(x);\; x \in M\}).$$

- Množina $f(A)$ se nazývá *obor hodnot* zobrazení f. (Značíme R_f nebo H_f.)
- *Vzorem* množiny $W \subset B$ při zobrazení f nazveme množinu

$$f_{-1}(W) = \{x \in A;\; f(x) \in W\}.$$

Poznámka. Nechť $f\colon A \to B$, $X, Y \subset A$, $U, V \subset B$. Pak platí

- $f_{-1}(U \cup V) = f_{-1}(U) \cup f_{-1}(V)$,
- $f_{-1}(U \cap V) = f_{-1}(U) \cap f_{-1}(V)$,

- $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$,
- $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Definice. Nechť A, B, C jsou množiny, $C \subset A$ a $f\colon A \to B$. *Zúžením (restrikcí) zobrazení f na množinu C* rozumíme zobrazení $\tilde{f}\colon C \to B$ definované předpisem $\tilde{f}(x) = f(x)$ pro každé $x \in C$. Značíme $f|_C$.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ a $g\colon B \to C$ jsou dvě zobrazení. Symbolem $g \circ f$ označíme zobrazení množiny A do množiny C definované předpisem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Takto definované zobrazení se nazývá *složeným zobrazením*.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f\colon A \to B$

- zobrazuje množinu A *na množinu* B, jestliže $f(A) = B$, tj. ke každému $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$,
- je *prosté*, jestliže rozdílným prvkům přiřazuje rozdílné hodnoty, tj.

$$\forall x_1, x_2 \in A\colon x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

- je *bijekce A na B* (nebo též *vzájemně jednoznačné zobrazení*), jestliže je zároveň prosté a zobrazuje A na B.

Definice. Nechť $f\colon A \to B$ je bijekce (tj. f je prosté a na). *Inverzním zobrazením $f^{-1}\colon B \to A$* rozumíme zobrazení, které každému prvku $y \in B$ přiřadí (jednoznačně určený) prvek $x \in A$ splňující $f(x) = y$.

I.4 Metody důkazů

- přímý důkaz
- nepřímý důkaz
- důkaz sporem

Tvrzení 1 (de Morganova pravidla). *Mějme množiny S, A_α, $\alpha \in I$, kde $I \neq \emptyset$. Pak platí*

$$S \setminus \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha) \qquad a \qquad S \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S \setminus A_\alpha).$$

Příklad (iracionalita $\sqrt{2}$). Jestliže reálné číslo x řeší rovnici $x^2 = 2$, pak x není racionální. Důkaz sporem