II. Množina reálných čísel

II.1. Definice množiny reálných čísel

Definice. *Množinou reálných čísel* $\mathbb{R}$ budeme rozumět množinu, na níž jsou definovány operace *sčítání* a *násobení* (značíme $+$ a $\cdot$), a relace *menší nebo rovno* (značíme $\leq$), přičemž jsou splněny následující tři skupiny vlastností.

I. Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah.

II. Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení.

III. Axiom infima.

Vlastnosti sčítání a násobení a jejich vzájemný vztah:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x + y = y + x$ (*komutativita sčítání*),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x + (y + z) = (x + y) + z$ (*asociativita sčítání*),
- v $\mathbb{R}$ existuje takový prvek (značíme ho 0 a říkáme mu *nulový prvek*), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $x + 0 = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ (y je tzv. *opačné číslo* k číslu x, takové y je jen jedno, značíme ho $-x$),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = y \cdot x$ (*komutativita násobení*),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (*asociativita násobení*),
- v $\mathbb{R}$ existuje nenulový prvek (tzv. *jednotkový prvek*, značíme ho 1), že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je $1 \cdot x = x$,
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$ (takové y je jen jedno, značíme ho x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$),
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*distributivita*).

Vztah uspořádání a operací sčítání a násobení:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \&\ \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (*tranzitivita*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x \leq y \ \ \&\ \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ (*slabá antisymetrie*),
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \leq y \vee y \leq x$,
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$,
- $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (0 \leq x \ \ \&\ \ 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Axiom infima:
Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná a zdola omezená. Pak M má v $\mathbb{R}$ právě jedno infimum.

Definice. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená zdola*, jestliže existuje číslo $a \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x \in M$ platí $x \geq a$. Takové číslo a se nazývá *dolní závorou* množiny M. Analogicky definujeme pojmy *množina omezená shora* a *horní závora*. Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je *omezená*, je-li omezená shora i zdola.

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná zdola omezená množina. Číslo $g \in \mathbb{R}$ nazveme *infimum* množiny M, jestliže platí:

(i) $\forall x \in M\colon x \geq g$,

(ii) $\forall g' \in \mathbb{R}, g' > g\ \exists x \in M\colon x < g'$.

Značíme $g = \inf M$.

Poznámka.

- Infimum množiny M je její největší dolní závora.
- Axiom infima říká, že každá neprázdná zdola omezená množina má infimum.

Poznámka.

- Ekvivalentní definice: Množina reálných čísel je uspořádané těleso, které splňuje axiom infima.
- Reálná čísla existují a jsou vlastnostmi I–III určena jednoznačně. (Silné tvrzení!)

Přirozená čísla a matematická indukce

Množina přirozených čísel je nejmenší množina $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, která splňuje

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\forall\, n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n+1) \in \mathbb{N}$.

Metoda matematické indukce:

Nechť $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je výroková forma. Platí-li

- $V(1)$
- $\forall\, n \in \mathbb{N} : V(n) \Rightarrow V(n+1)$,

pak $\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$.

Množiny celých a racionálních čísel

Množina celých čísel

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n;\ n \in \mathbb{N}\}$$

Množina racionálních čísel

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Přeneseme-li sčítání a násobení z $\mathbb{R}$ na uvedené množiny, dostaneme operace, na něž jsme na těchto užších číselných množinách zvyklí.

Reálné číslo, které není číslem racionálním, nazveme číslem *iracionálním*. Množina $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se nazývá *množinou čísel iracionálních*.

Komplexní čísla

Množinou *komplexních čísel* rozumíme množinu všech výrazů tvaru $a+bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$. Na $\mathbb{C}$ jsou definovány operace sčítání a násobení splňující vlastnosti skupiny I a navíc platí $i \cdot i = -1$.

Věta („základní věta algebry“). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Pak rovnice*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

má alespoň jedno řešení $z \in \mathbb{C}$.

Tvrzení 9. *Platí:*

(i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$,

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon\ -x = (-1) \cdot x$,

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$,

(iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x^{-n} = (x^{-1})^n$,

(v) $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0$,

(vi) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}, y \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}\colon x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$.

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Značíme:

- *Otevřený interval* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$,
- *Uzavřený interval* $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$,
- *Polootevřený interval* $\langle a, b) = \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$,
- *Polootevřený interval* $(a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$.

Bod a se nazývá *levý krajní bod intervalu*, bod b se nazývá *pravý krajní bod intervalu*. Bod, který je prvkem intervalu, ale není jeho krajním bodem, je tzv. *vnitřním bodem intervalu*.

Neomezené intervaly:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R};\ x < a\},$$

analogicky definujeme $(-\infty, a\rangle$, $\langle a, +\infty)$ a $(-\infty, +\infty)$.

II.2 Důsledky axiomu infima

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $G \in \mathbb{R}$ splňující

(i) $\forall x \in M : x \leq G$,

(ii) $\forall G' \in \mathbb{R}, G' < G \; \exists x \in M : x > G'$,

nazýváme *supremem* množiny M.

Tvrzení 10 (o supremu)**.** *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdná shora omezená množina. Pak existuje právě jedno supremum množiny M.*

Supremum množiny M značíme $\sup M$.
Platí $\sup M = -\inf(-M)$.

Definice. Budiž $M \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že a je *největší prvek* (*maximum*) množiny M (značíme $\max M$), jestliže a je horní závorou množiny M a $a \in M$. Analogicky definujeme *nejmenší prvek* (*minimum*) M, který značíme $\min M$.

Lemma 11. *Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a platí*

$$\forall x, y \in M \; \forall z \in \mathbb{R}, x < z < y : z \in M.$$

Pak M je interval.

Věta 12 (existence celé části)**.** *Pro každé $r \in \mathbb{R}$ existuje celá část čísla r, tj. číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že $k \leq r < k + 1$. Celá část čísla r je určena jednoznačně a značíme ji $[r]$.*

Věta 13 (Archimédova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $x < n$.*

Věta 14 (o n-té odmocnině)**.** *Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in \langle 0, +\infty)$ splňující $y^n = x$.*

Věta 15 (o hustotě $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)**.** *Buďte $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Potom existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $a < r < b$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ splňující $a < s < b$.*