Písemná zkouška z Matematiky I pro FSV
vzor

1. Spočtěte limitu a řádně odůvodněte jednotlivé kroky výpočtu:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sqrt[3]{n^3+n^2} - n\sqrt[3]{8^n+1}}{\sqrt[n]{2^{n^2}+1}}.$$

2. Spočtěte limitu a řádně odůvodněte jednotlivé kroky výpočtu:

$$\lim_{x\to 0} (2^{\cos x} - 1)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}.$$

3. Vyšetřete spojitost a derivaci funkce

$$f(x) = [x+1]x^3.$$

(Výraz $[z]$ značí celou část čísla $z \in \mathrm{R}$.)

4. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + \frac{1}{x}}.$$

Řešení

Řešení 1. úlohy
Upravujme nejprve čitatel, použijme $(a-b)\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ a získáme

$$\frac{2^{3n}\left(n^3+n^2\right)-n^3\left(2^{3n}+1\right)}{2^{2n}\sqrt[3]{n^3+n^2}^2+2^n\sqrt[3]{n^3+n^2}n\sqrt[3]{2^{3n}+1}+n^2\sqrt[3]{2^{3n}+1}^2}.$$

Vytkneme nejrychleji rostoucí člen

$$\frac{2^{3n}n^2\left(1-n2^{-3n}\right)}{2^{2n}n^2\left[\sqrt[3]{1+n^{-1}}^2+\sqrt[3]{1+n^{-1}}\sqrt[3]{1+2^{-3n}}+\sqrt[3]{1+2^{-3n}}^2\right]} = 2^n\frac{1-n2^{-3n}}{A_n},$$

A_n jsme označili výraz v hranaté závorce. Upravme nyní jmenovatel

$$\sqrt[n]{2^{n^2}\left(1+2^{-n^2}\right)} = 2^n\sqrt[n]{1+2^{-n^2}}.$$

Nyní si napíšeme limitu ze zadání a zkrátíme 2^n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n2^{-3n}}{A_n\cdot\sqrt[n]{1+2^{-n^2}}} = \frac{\lim_{n\to\infty}1-n2^{-3n}}{\lim_{n\to\infty}A_n\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^{-n^2}}} = \frac{1}{3},$$

kde první rovnost plyne z aritmetiky limit a druhou rovnost ještě podrobně zdůvodníme.
Limita v čitateli je rovna jedné podle aritmetiky limit a protože

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{3n}} = 0.$$

Tato limita je nula, protože

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)8^n}{n8^{n+1}} = \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{8} < 1.$$

Odmocnina ve jmenovateli se blíží k jedné, podle dvou strážníků. Máme totiž

$$1 \le \sqrt[n]{1+2^{-n^2}} \le 1+2^{-n^2} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}2^{-n^2} = 0,$$

protože podíl po sobě jdoucích členů jde k nule. Podobně pomocí strážníků

$$1 \le \sqrt[3]{1+n^{-1}} \le 1+n^{-1} \quad \text{a} \quad 1 \le \sqrt[3]{1+2^{-3n}} \le 1+2^{-3n}$$

získáme

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+n^{-1}} = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+2^{-3n}} = 1$$

a aritmetika limit nám dá $\lim_{n\to\infty}A_n = 3$. Výsledek je tedy $\frac{1}{3}$.

Bodování: 3 body - roznásobení odmocnin, 4 body - vytknutí nejrychleji rostoucího členu, 2 body - aritmetika limit a výsledek, 6 bodů - zdůvodnění tří limit v závěru.

Řešení 2. úlohy Přepišme si limitu jako

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{\arcsin^2 x} \ln\left(2^{\cos x} - 1\right)\right)$$

a počítejme limitu argumentu exponenciály. Ten si můžeme přepsat následujícím způsobem:

$$\left(\frac{x}{\arcsin x}\right)^2 \cdot \frac{\ln(2^{\cos x} - 1)}{2^{\cos x} - 2} \cdot 2 \cdot \frac{2^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Použitím aritmetiky limit pak získáváme

$$1^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\ln 2,$$

výpočty jednotlivých limit podrobně zdůvodníme níže. Protože exponenciála je spojitá v bodě $-\ln 2$, je původní limita rovna $e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$.

Zdůvodněme nyní jednotlivé limity:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = 1$$

podle VOLSF, protože vnitřní funkce arcsin nenabývá nuly na prstencovém okolí nuly.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2^{\cos x} - 1)}{2^{\cos x} - 2} = 1$$

podle VOLSF, protože vnitřní funkce $2^{\cos x} - 1$ nenabývá hodnoty 1 (protože $\cos x \neq 1$) na prstencovém okolí nuly.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1} = \ln 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln 2(\cos x - 1)} - 1}{\ln 2(\cos x - 1)} = \ln 2$$

podle VOLSF, protože vnitřní funkce $\ln 2(\cos x - 1)$ nenabývá hodnoty nula na prstencovém okolí nuly (protože $\cos x \neq 1$).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = -\frac{1}{2}$$

podle aritmetiky limit.

Bodování: 2 body - přepis pomocí exponenciály, 2 body - $\frac{x}{\arcsin x}$, 3 body - logaritmus, 4 body - $\frac{2^{\cos x - 1} - 1}{\cos x - 1}$, 2 body - $\frac{\cos x - 1}{x^2}$, 2 body - aritmetika limit a výsledek.

Řešení 3. úlohy

Funkce je na intervalu $\langle k, k+1)$ rovna $f(x) = (k+1)x^3$. Protože je to polynom, je funkce na tomto intervalu spojitá a v levém krajním bodě spojitá zprava. Zbývá vyřešit spojitost zleva v celých číslech. Máme

$$\lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} kx^3 = k^4 \quad \text{a} \quad f(k) = (k+1)k^3 = k^4 + k^3.$$

Funkce je tedy spojitá v nule, v ostatních celých číslech není spojitá zleva.

Derivace funkce je v bodě $x \in (k, k+1)$ rovna $f'(x) = 3(k+1)x^2$. V celých číslech počítejme derivaci zprava

$$f'_+(k) = \lim_{x \to k+} f'(x) = 3(k+1)k^2,$$

protože f je spojitá zprava v celých číslech. Derivaci zleva počítáme z definice

$$f'_-(k) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(f(k) - f(k-h)) = \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(k^4 + k^3 - k(k-h)^3)$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}(k^3(1+3h) - 3k^2h^2 + kh^3) = 3k^3 + \lim_{h \to 0+} \frac{k^3}{h}.$$

Výsledek je $f'_-(k) = +\infty$ pro $k = 1, 2, \dots$, $f'_-(k) = -\infty$ pro $k = -1, -2, \dots$ a $f'_-(k) = 0$ pro $k = 0$. Tj., $f'(0) = 0$, v ostatních celých číslech derivace neexistuje.

Bodování: 4 body - spojitost, 2 body - derivace v necelých číslech, 4 body - derivace v celých číslech.

Řešení 4. úlohy

1. Definiční obor je $\mathrm{R} \setminus \{0\}$, funkce je na svém definičním oboru spojitá (součet a složení spojitých funkcí).

2. Funkce není ani sudá ani lichá, protože $f(-1) = 0$ a $f(1) = \sqrt[3]{2}$ a není periodická, protože $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$, jak bude vidět dále.

3.
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{x}^2 \sqrt[3]{1 + x^{-3}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0\pm} f(x) = \lim_{x \to 0\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{x^3 + 1} = \pm\infty.$$

Tedy globální extrémy neexistují, obor hodnot je R (spojitost na $(-\infty, 0)$ a nabývání mezihodnot).

4. Pro $x \neq 0$ a $x \neq -1$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2 + x^{-1}}^2}(2x - x^{-2}) = \frac{1}{3x^2\sqrt[3]{x^2 + x^{-1}}^2}(2x^3 - 1).$$

Tj. $f' > 0$ pro $x > \sqrt[3]{1/2}$ a f je rostoucí na $(\sqrt[3]{1/2}, +\infty)$. Funkce f je klesající na $(-\infty, 0)$ a $(0, \sqrt[3]{1/2})$. V bodě $\sqrt[3]{1/2}$ je lokální minimum, má velikost $\sqrt[3]{\sqrt[3]{1/4} + \sqrt[3]{2}}$.

Zbývá ještě vyšetřit derivaci v bodě $x = -1$, funkce f je v tomto bodě spojitá a máme tedy

$$f'_\pm(-1) = \lim_{x \to -1\pm} f'(x) = \lim_{x \to -1\pm} \frac{1}{3\sqrt[3]{x+1}^2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}(2x - x^{-2})}{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}^2} = -\infty.$$

5. Vypočteme druhou derivaci pro $x \neq 0, -1$.

$$
\begin{aligned}
f''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\sqrt[3]{x^2+x^{-1}}^{-5}(2x-x^{-2})^2 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2+x^{-1}}^{-2}(2+2x^{-3}) \\
= \frac{1}{9}\sqrt[3]{x^2+x^{-1}}^{-5}\left(-2(2x-x^{-2})^2+3(x^2+x^{-1})(2+2x^{-3})\right) \\
= \frac{2}{9}\sqrt[3]{x^2+x^{-1}}^{-5}x^{-4}\left(-x^6+10x^3+2\right).
\end{aligned}
$$

Poslední závorka má kořeny $x^3 = 5 \pm 3\sqrt{3}$, takže funkce je konvexní na $(-1, \sqrt[3]{5-3\sqrt{3}})$ a $(0, \sqrt[3]{5+3\sqrt{3}})$ a konkávní na $(-\infty, -1)$, $(\sqrt[3]{5-3\sqrt{3}}, 0)$ a $(\sqrt[3]{5+3\sqrt{3}}, +\infty)$, body $\sqrt[3]{5 \pm 3\sqrt{3}}$ jsou inflexní.

6. Funkce nemá asymptoty v $\pm\infty$, protože $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$ a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

7. Graf – ten tu kreslit nebudu.

Bodování: 3 body - body 1 a 2, 2 body - limity, 4 body - derivace a monotonie, 2 body - derivace v bodě -1, 5 bodů - druhá derivace, konvexita, inflexe, 2 body - asymptoty, 2 body - graf.