1. úloha: limita posloupnosti

Jak přijít na řešení (toto není korektní zdůvodnění):
Máme posloupnost

$$a_n = \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) = b_n + c_n.$$

Většinu z vás napadlo, že

$$\frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} = \frac{2n}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}},$$

což je pro velká n přiblližně rovno $2n \to +\infty$. Člen $\sin(n\pi/2)$ nabývá střídavě hodnot $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$. Tedy

$$\lim \frac{2 \cdot n!}{(n-1)! + 2^n} \sin \frac{n\pi}{2} = \lim b_n$$

neexistuje, protože najdeme podposloupnosti, které jdou k $+\infty$, k 0, k $-\infty$. Jsou to po řadě podposloupnosti b_{4k+1}, b_{2k}, b_{4k-1}.
To ale ještě neznamená, že limita a_n nebude existovat. Kdyby třeba $\lim c_n = +\infty$ a b_n byla omezená, pak by $\lim b_n + c_n = +\infty$. V našem případě sice b_n není omezená, ale kdyby c_n divergovala do $+\infty$ dost rychle, převážila by i posloupnost b_{4k-1}. Jak se tedy chová c_n?
Máme

$$c_n = n^2 \sin(1/n) = n \frac{\sin(1/n)}{1/n},$$

což je pro velká n přibližně rovno $n \to +\infty$. Nyní je vidět, že

$$\lim a_{2k} = \lim 0 + c_{2k} = +\infty$$

a podle aritmetiky limit

$$\lim a_{4k+1} = \lim b_{4k+1} + \lim c_{4k+1} = +\infty + \infty = +\infty.$$

Problém ale máme pro a_{4k-1}, kde aritmetiku limit nemůžeme použít

$$\lim a_{4k-1} = \lim b_{4k-1} + \lim c_{4k-1} = +\infty - \infty,$$

což je nedefinovaný výraz. Musíme tedy zjistit, které z těchto dvou nekonečen „je větší“. Výše jsme zmínili, že b_n se chová přibližně jako $2n$ a c_n přibližně jako n, každopádně n můžeme z výrazu vytknout a dostáváme

$$a_n = n \left(\frac{2}{1 + \frac{2^n}{(n-1)!}} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\sin(1/n)}{1/n} \right).$$

Nyní můžeme spočítat limitu a_{4k-1}:

$$\lim a_{4k-1} = \lim(4k-1)\left(\lim \frac{2}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} \cdot (-1) + \lim \frac{\sin\frac{1}{4k-1}}{\frac{1}{4k-1}}\right) = +\infty(-2+1) = -\infty.$$

Protože už víme, že $\lim a_{2k} = +\infty$, $\lim a_n$ neexistuje.

Nejčastější chyby:

1. špatně použitá AL: Napíšeme-li hned v prvím kroku

$$\lim a_n = \lim b_n + \lim c_n,$$

je to špatně, protože $\lim b_n$ neexistuje a $\lim c_n = +\infty$, takže pravá strana není definována.

2. Částečné limitění: Píšeme-li

$$\lim \frac{2n}{1+\frac{2^n}{(n-1)!}} \sin\frac{n\pi}{2} + n\frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim 2n\sin\frac{n\pi}{2} + n,$$

je to špatně, protože nás žádná věta neopravňuje tuto úpravu udělat. Navíc přece potřebujeme porovnávat velikosti dvou nekonečen (rychlosti divergence dvou posloupností) a touto úpravou jsme tyto rychlosti změnili (sice nepatrně, ale změnili, tato nepatrná změna přenásobená n, které jde k nekonečnu, může nakonec být docela velká). Jediný způsob, jak odůvodnit tuto úpravu pomocí AL, by bylo nejprve udělat

$$\lim a_n = \lim b_n + \lim c_n,$$

a to přece nejde, protože výraz napravo není definován.

3. Podílové kritérium: toto kritérium říká, že pokud $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, pak je $\lim a_n = 0$. Neříká, že pokud $a_{n+1}/a_n < 1$, pak $\lim a_n = 0$. To druhé totiž není pravda, vezměme si třeba $a_n = 1 + 1/n$...

4. Není pravda, že pokud $\lim b_n$ neexistuje, pak ani $\lim b_n + c_n$ neexistuje. Vezměme například $\sin n + n$.

5. O nesmyslech typu

$$\lim \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} = 1$$

tu ani psát nebudu.

2. úloha: limita funkce

nejčastější chyby:

6. částečné limitění. Nelze psát

$$\lim \frac{\frac{e^{\sqrt{\cos x}-1}-1}{\sqrt{\cos x}-1}(\sqrt{\cos x}-1) - \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}\sin x}{x} = \lim \frac{(\sqrt{\cos x}-1) - \sin x}{x},$$

tj. nahradit některé výrazy uprostřed velkého výrazu jejich limitami, protože nás žádná věta neopravňuje to udělat (podobně jako částečné limitění v úloze 1).

3. úloha: spojitost a derivace

nejčastější chyby:

7. zapomenutý definiční obor. Samozřejmě derivace může existovat pouze tam, kde je funkce definována. Také spojitost nemá smysl v bodech, kde funkce není definována, např. $\pm\sqrt{3}$.

8. derivování funkce sgn**.** Pokud neumíte derivovat signum, tak pracujte na jednotlivých intervalech, kde je signum rovna jedné, resp. minus jedné a tím se funkce signum zbavíte. Jinak samozřejmě derivace funkce signum je nula (mimo bod skoku), protože je to po částech konstantní funkce.

9. derivace v problematických bodech. jednostranná derivace je limitou derivací jen v případě, že je funkce spojitá (viz příslušná věta). Není-li funkce v daném bodě spojitá, je nutné derivaci počítat z definice.

4. úloha: průběh funkce

nejčastější chyby:

10. druhá derivace a práce s polynomy. Při výpočtu druhé derivace vyšel polynom třetího stupně. Bylo vidět, že jednička je jeho kořenem. Pak stačí polynom vydělit polynomem $(x-1)$ a získáme kvadratický polynom, jehož kořeny už umíme najít. Bylo dobré vytknout (x^2+1) a pak sečíst polynomy třetího stupně, nikoli polynomy roznásobovat závorkou (x^2+1) a pak se snažit najít kořeny výsledného polynomu pátého stupně. Samozřejmě když uděláte numerickou chybu, vyjde vám jiný polynom třetího stupně, jeho kořen neuhodnete a máte smůlu.