IX. Lineární algebra

IX.1. Vektorové prostory

Symbol $\mathbb{K}$ značí množinu $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Definice. *Vektorovým prostorem nad* $\mathbb{K}$ rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbb{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu *nulový prvek*), splňující
$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.$$
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\ \exists \boldsymbol{w} \in V\colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{v} \in V\colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\colon 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je *vektorový podprostor* prostoru V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U\colon a \cdot \boldsymbol{u} \in U$.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. Výraz
$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{u}_m$$
nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Pokud alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ je nenulové, pak hovoříme o *netriviální* lineární kombinaci, v opačném případě jde o *triviální* lineární kombinaci. Lineární kombinací prázdné množiny vektorů rozumíme nulový vektor.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ jsou *lineárně závislé*, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou *lineárně nezávislé*. Řekneme, že množina $M \subset V$ je *lineárně nezávislá*, jestliže libovolná m-tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $M \subset V$. Řekneme, že množina M *generuje* V, jestliže každý vektor z V je lineární kombinací konečně mnoha vektorů z M.

Definice. Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subset V$. Řekneme, že B je *báze* prostoru V, jestliže množina B je lineárně nezávislá a generuje V.

Věta 1 (o bázi vektorového prostoru)**.** *(i) Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

(ii) Každý vektorový prostor má bázi.

(iii) Počet prvků báze prostoru V je určen jednoznačně a nazýváme ho dimenze prostoru V (značíme $\dim V$).

Definice. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je *konečněrozměrný (konečnědimenzionální)*. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o *nekonečněrozměrném (nekonečnědimenzionálním)* vektorovém prostoru.

Tvrzení 2 (o bázi konečněrozměrného prostoru). *Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{K}$.*

(i) Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V, pak množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je bází prostoru V.

(ii) Jestliže pro vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ platí $\operatorname{lin}_{\mathbb{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = V$, je množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ bází prostoru V.

IX.2. Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá *lineární*, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,
- $\forall a \in \mathbb{K}\ \forall \boldsymbol{u} \in U\colon L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$.

Definice. Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. *Jádrem* lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\operatorname{Ker}(L) = L^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Symbolem $\operatorname{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L, tedy

$$\operatorname{Im} L = L(U) = \{\boldsymbol{v} \in V;\ \exists \boldsymbol{u} \in U\colon L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}.$$

Věta 3 (vlastnosti jádra a obrazu). *Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbb{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) Množina $\operatorname{Ker}(L)$ je vektorovým podprostorem U.

(ii) Množina $\operatorname{Im}(L)$ je vektorovým podprostorem V.

(iii) Pro dimenze platí: $\dim U = \dim \operatorname{Ker}(L) + \dim \operatorname{Im}(L)$.

Nechť U, V jsou vektorové prostory, $L\colon U \to V$ je lineární zobrazení a $\boldsymbol{b} \in V$. Uvažujme rovnici

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Věta 4 (řešení nehomogenní rovnice). *Nechť $\boldsymbol{x}_0 \in U$ je řešením rovnice (1). Potom množina*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{w} \in \operatorname{Ker}(L)\}$$

je množinou všech řešení rovnice (1).

Nechť $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Uvažujme soustavu m rovnic o n neznámých

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Důsledek 5. *Má-li soustava (2) řešení $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, pak množina všech řešení má tvar*

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}\}.$$

IX.3. Bilineární formy

Definice. Řekneme, že zobrazení $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *bilineární forma*, jestliže platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n\colon B(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$,

(ii) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon B(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = aB(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,

(iii) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n\colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$,

(iv) $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n\colon B(\boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v}) = aB(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Věta 6 (reprezentace bilineárních forem). *Zobrazení $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilineární forma, právě když existuje matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ taková, že*

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{v}.$$

Definice. Matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ z předchozí věty se nazývá *reprezentující maticí* formy B.

Definice. Řekneme, že bilineární forma $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je *symetrická*, jestliže platí

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}).$$

Poznámka. Bilineární forma B je symetrická, právě když její reprezentující matice $\boldsymbol{A}$ je symetrická, tj. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.

Definice. Nechť $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je symetrická bilineární forma. Řekneme, že B je

- *pozitivně definitní* (PD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$,
- *negativně definitní* (ND), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o} \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) < 0$,
- *pozitivně semidefinitní* (PSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$,
- *negativně semidefinitní* (NSD), jestliže $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \leq 0$,
- *indefinitní* (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj. $\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \colon B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0 \ \&\ B(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) < 0$.

Definice. Řekneme, že matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je *diagonální*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Tvrzení 7 (definitnost diagonální matice). *Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je diagonální. Pak platí:*

- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je pozitivně semidefinitní, právě když $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je negativně semidefinitní, právě když $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;*
- *$\boldsymbol{A}$ je indefinitní, právě když existují taková $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, že $a_{ii} > 0$ a $a_{jj} < 0$.*

Definice. *Symetrickou elementární úpravou* matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu, kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\boldsymbol{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.

Symetrickou transformací matice $\boldsymbol{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 8 (o matici transformace). *Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoli $\boldsymbol{A}' \in M(m \times n)$ vznikla z $\boldsymbol{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}'$.*

Věta 9 (o matici symetrické transformace). *Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Potom existuje regulární matice $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoli matice $\boldsymbol{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ pomocí T, tak platí $\boldsymbol{BAB}^T = \boldsymbol{A}'$.*

Lemma 10 (o symetrické transformaci symetrické matice). *(i) Je-li $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ symetrická matice a $\boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, pak $\boldsymbol{CAC}^T$ je opět symetrická matice.*

(ii) Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Věta 11 (symetrické transformace a definitnost). *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice a nechť $\boldsymbol{B} \in M(n \times n)$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ pomocí symetrické transformace. Matice $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní (negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když $\boldsymbol{B}$ je pozitivně definitní (negativně definitní, ...).*

Věta 12 (diagonalizace symetrické matice)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Věta 13 (Sylvestrovo kritérium)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak $\boldsymbol{A}$ je*

- *pozitivně definitní, právě když*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \textit{pro každé } k = 1, \dots, n,$$

- *negativně definitní, právě když*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \textit{pro každé } k = 1, \dots, n,$$

- *pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$, platí*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0,$$

- *negativně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, $k = 1, \dots, n$, platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0.$$

IX.4. Vlastní čísla a vektory

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je *vlastní číslo* matice $\boldsymbol{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ takový, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme *vlastním vektorem* matice $\boldsymbol{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 14 (o charakteristickém polynomu matice)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice $\boldsymbol{A}$, právě když $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ je polynom stupně n s koeficientem jedna u λ^n.*

Věta 15 (o počtu vlastních čísel)**.** *Matice $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$. Polynom $\lambda \mapsto \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ se nazývá *charakteristický polynom* matice $\boldsymbol{A}$. *Násobnost vlastního čísla matice* definujeme jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 16 (vlastní čísla symetrické matice)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak jsou všechna její vlastní čísla reálná.*

Definice. Řekneme, že matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ je *ortogonální*, jestliže platí $\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$.

Věta 17 (spektrální rozklad matice)**.** *Nechť $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak existuje ortogonální matice $\boldsymbol{Q} \in M(n \times n)$ taková, že*

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$.

Věta 18 (vlastní čísla a definitnost)**.** *Nechť* $\boldsymbol{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak platí:*

- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*
- $\boldsymbol{A}$ *je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.*

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. *Stopou* matice $\boldsymbol{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 19 (vlastnosti stopy)**.** *Nechť* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbb{R}$. *Pak platí:*

(i) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\boldsymbol{A}) = a \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$,

(iv) $\operatorname{tr}(\boldsymbol{ABC}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{CAB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BCA})$.

IX.5. Norma vektoru

Definice. *Normou* vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme číslo

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Věta 20 (vlastnosti normy)**.** *Nechť* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Pak platí*

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$,

(ii) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, *právě když* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$,

(iii) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$,

(iv) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *(trojúhelníková nerovnost),*