Písemná zkouška z ODR
20.5.2025, Termín A

1. Uvažujte soustavu

$$x' = xy^2 - x$$
$$y' = -xy^2 + y^2$$

(a) Rozhodněte, v kterých částech roviny (x, y) je x resp. y rostoucí resp. klesající. Načrtněte obrázek těchto oblastí.

(b) Vypočtěte první integrál.

(c) Na základě (a) načrtněte trajektorie řešení do roviny (x, y). Načrtněte trajektorie v okolí stacionárních bodů.

2. Uvažujte soustavu $x' = f(x)$ a její linearizaci $y' = Ay$ na okolí počátku, kde $A = \nabla f(0)$ je

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Lze rozhodnout o stabilitě nulového řešení soustavy $x' = f(x)$ na základě linearizace?

(b) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení lineární rovnice $y' = Ay$.

(c) Vypočtěte e^{tA}.

3. Uvažujte soustavu s parametrem $a \in R$

$$x' = ax - x^3 - y^5$$
$$y' = 3x^3 - 3y^3$$

(a) Vyšetřete stabilitu počátku pomocí linearizace pro $a > 0$.

(b) Pro $a \leq 0$ najděte ljapunovskou funkci.

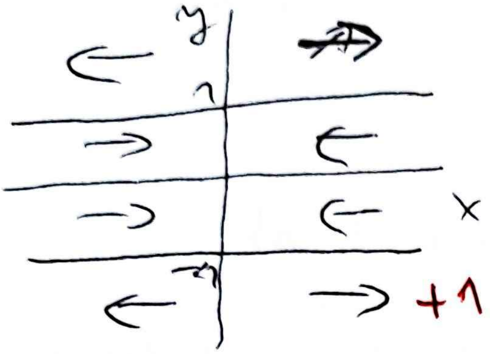
(c) Zdůvodněte asymptotickou stabilitu počátku pro $a \leq 0$.

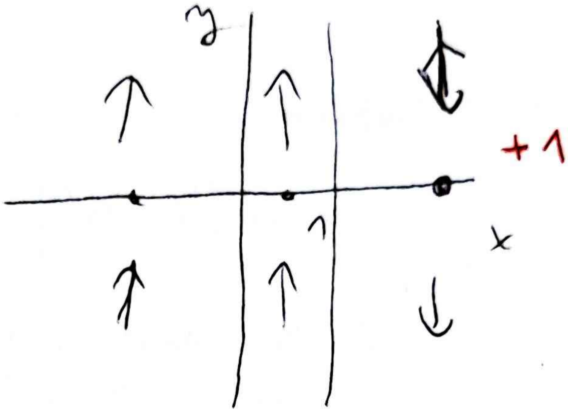
Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

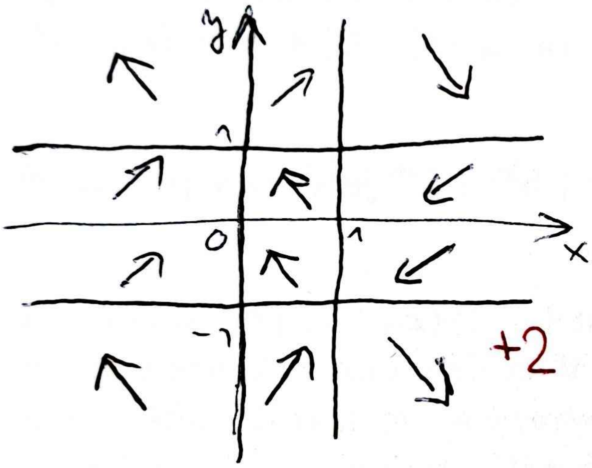
A1

$$x' = xy^2 - x = x(y^2-1)$$
$$y' = -xy^2 + y^2 = y^2(1-x)$$

(a)







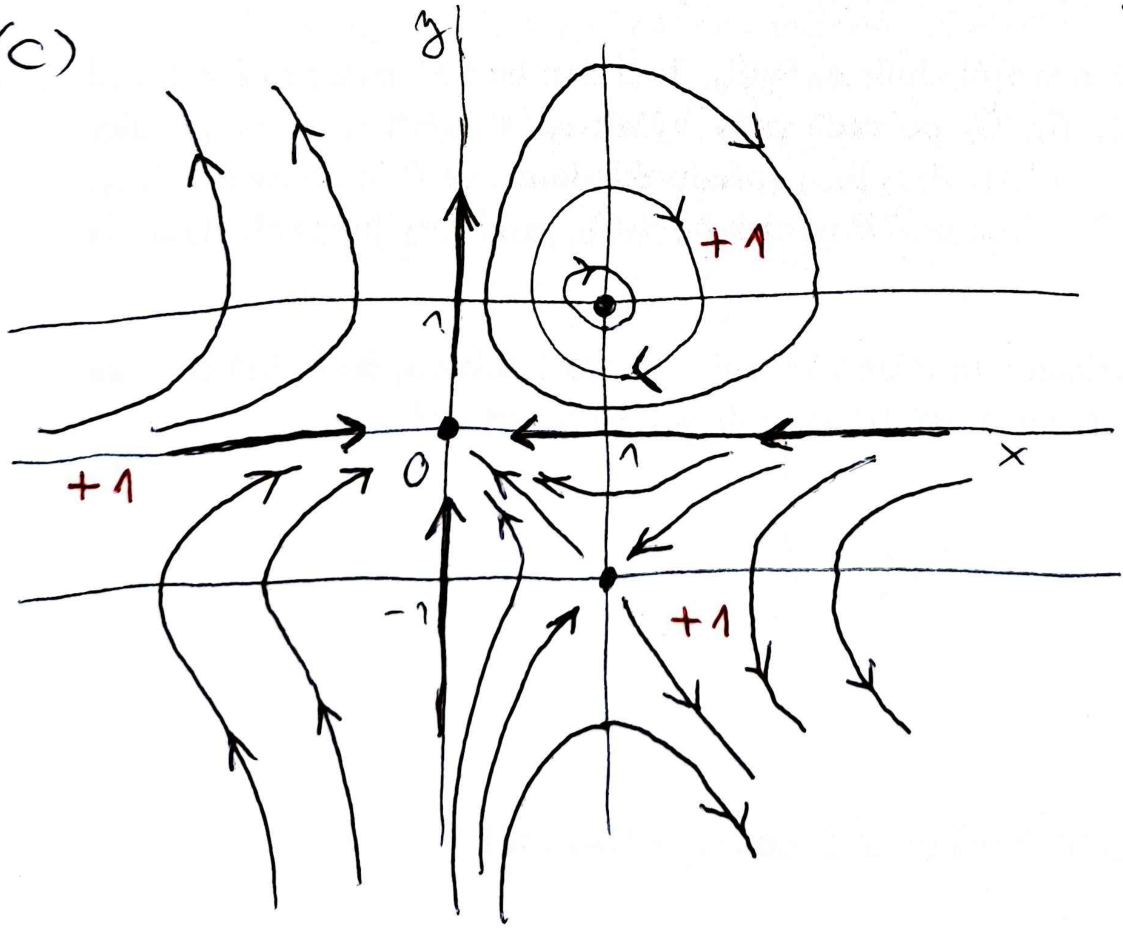
(b) $x' y^2 (1-x) = y' x (y^2-1)$ +1

$$x' \frac{1-x}{x} = y' \frac{y^2-1}{y^2} \quad / \int$$

$$\ln|x| - x = y + \frac{1}{y} + c$$ +1

$$V(x,y) = y + \frac{1}{y} + x - \ln|x|$$ +1

(c)



$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A2

(a) $\det(\lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ +1 $= (\lambda^2-1)\lambda + 1 - (\lambda+1) + 2\lambda$

$= \lambda^3 - \lambda - \lambda + 2\lambda = \lambda^3 = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 0$ +1

nelze rozhodnout o stabilitě nelineární rovnice +2

(b) vl. vektory $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

prostor vl. vektorů nemá dimenzi 3 +1 – $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ není vl. vektor

$\Rightarrow \exists$ Jordanova buňky vel ≥ 2 +1

$\Rightarrow$ nul. řešení lineární rovnice je nestabilní +1

(c) Matice je nilpotentní $\Rightarrow A^3 = 0$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = I + tA + \tfrac{1}{2}t^2A^2 = \begin{pmatrix} 1-t-\frac{1}{2}t^2 & 2t+\frac{1}{2}t^2 & t+\frac{1}{2}t^2 \\ -t & 1+t & t \\ -\frac{1}{2}t^2 & t+\frac{1}{2}t^2 & 1+\frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

+3

$$x' = ax - x^3 - y^5$$
$$y' = 3x^3 - 3y^3$$

A3

(a) $\nabla f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ +1 vl. čísla $a, 0$ +1

pro $a>0$ je nestabilní +2

(b) $V(x,y) = cx^{2n} + dy^{2m}$ +1

$$\dot V(x,y) = 2nc x^{2n-1} x' + 2md y^{2m-1} y' =$$

$$2nc x^{2n-1}(ax - x^3 - y^5) + 2md y^{2m-1}(3x^3 - 3y^3)$$

$$= \underbrace{2nca}_{<0} x^{2n} - 2nc x^{2n+2} - 6md y^{2m+2} - 2nc x^{2n-1} y^5 + 6md y^{2m-1} x^3$$

$n=2, m=3$ +1

$$= 4ac x^4 - 4c x^6 - 18d y^8 - 4c x^3 y^5 + 18d x^3 y^5$$

$c=9, d=2$ +1 $\qquad V(x,y) = 9x^4 + 2y^6$

$$= 36a x^4 - 36x^6 - 36y^8 \leq 0$$

(c) V je pozitivně definitní tj $V \leq V \leq V$ +1

a $\dot V \leq 36(ax^4 - x^6 - y^8)$ +1

kde $36(-ax^4 + x^6 + y^8)$ je PD funkce +1

$\Rightarrow$ asymptotická stabilita dle věty z přednášky