Písemná zkouška z ODR
27.5.2025, Termín B

1. Buď $\phi(t, \mu, \lambda)$ řešicí funkce rovnice s parametrem $\lambda \in \mathrm{R}$

$$x' = tx + \sin(\lambda x), \qquad x(0) = \mu.$$

(a) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t, 2, 0)$.

(b) Najděte $\frac{\partial \phi}{\partial \lambda}(t, 2, 0)$.

(c) Pomocí symbolu o zapište přibližnou hodnotu $\phi(t, \mu, \lambda)$ na okolí $(\mu, \lambda) = (2, 0)$.

2. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= xy - x^2 \\ y' &= xy^2. \end{aligned}$$

(a) Rozhodněte, v kterých částech roviny (x, y) je x resp. y rostoucí resp. klesající. Načrtněte příslušné vektorové pole.

(b) Načrtněte trajektorie řešení.

(c) S pomocí trajektorií rozhodněte o stabilitě stacionárních bodů.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= -y + xy + 2x^2 y \\ y' &= x - xy \end{aligned}$$

(a) Najděte stacionární body soustavy.

(b) Na základě linearizace vyšetřete stabilitu stacionárních bodů (nebo napište, že to nejde).

(c) Převeďte soustavu do polárních souřadnic. Rozhodněte, zda se na malém okolí počátku řešení k počátku přibližují nebo se od něj vzdalují, případně v kterých výsečích se přibližují a v kterých vzdalují.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

$x' = tx + \sin(\lambda x)\,, \quad x(0) = \mu \qquad \phi(t,2,0)$ B1

a) $D_x f = t + \cos(\lambda x)\cdot\lambda \underset{\lambda=0}{=} t$ +1
+1

rovnice ve variacích

$u' = tu\,, \quad u(0) = 1$ +1 $\quad \dfrac{\partial\phi}{\partial\mu} = e^{\frac{1}{2}t^2}$

$u(t) = c\,e^{\frac{1}{2}t^2}\,; \quad c = 1$ +1

b) $D_\lambda f = \cos(\lambda x)\cdot x \underset{\lambda=0}{=} x = 2e^{\frac{1}{2}t^2}$

$x' = tx + \sin(0\cdot x) = tx\,; \quad x(0) = 2$

$x(t) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}$

rovnice ve variacích:

$v' = t\cdot v + 2\cdot e^{\frac{1}{2}t^2}\,, \quad v(0) = 0$ +2

integrační faktor

$\left(e^{-\frac{1}{2}t^2} v\right)' = 2 \qquad v(t) = 2t\,e^{+\frac{1}{2}t^2} + c\,e^{\frac{1}{2}t^2}$

$v(0) = 0 \rightarrow c = 0$

$e^{-\frac{1}{2}t^2} v = 2t + c \qquad v(t) = 2t\,e^{\frac{1}{2}t^2} = \dfrac{\partial\phi}{\partial\lambda}$ +1

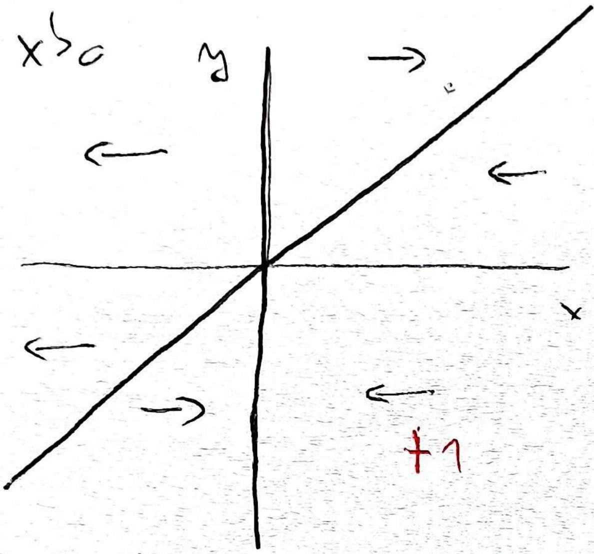
c) $\phi(t,\mu,\lambda) = 2e^{\frac{1}{2}t^2} + e^{\frac{1}{2}t^2}(\mu - 2) + 2t\,e^{\frac{1}{2}t^2}\lambda$
$+\, o\left(|\mu| + |\lambda|\right)$

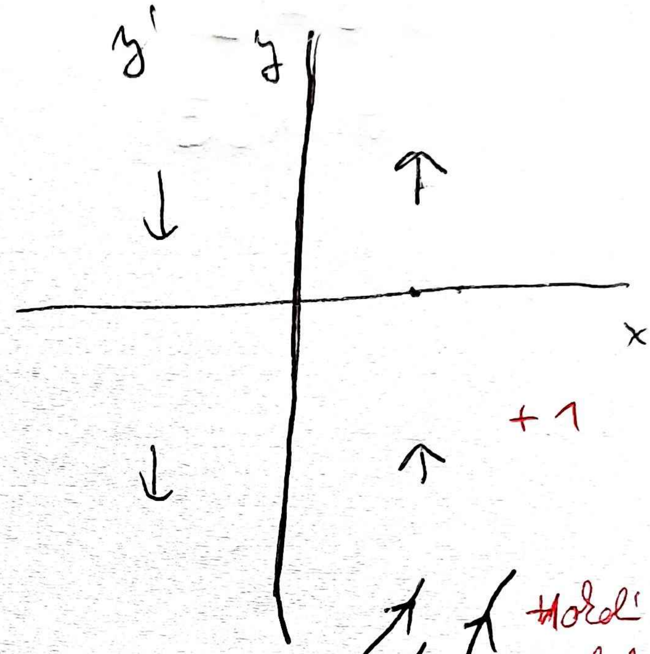
+3

$$x' = xy - x^2 = x(y-x)$$ (B2)

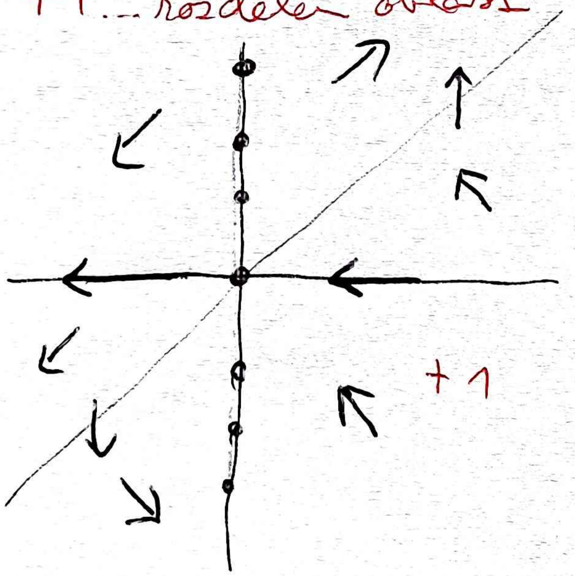
$$y' = xy^2$$

a):

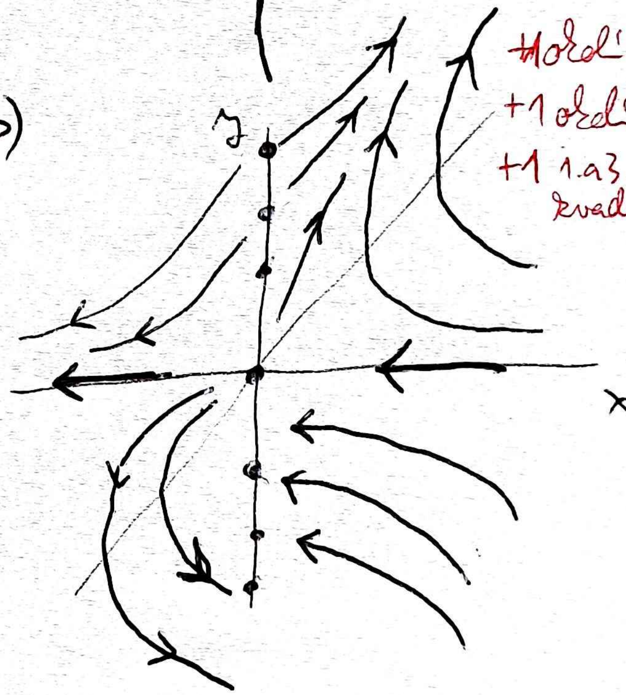




+1 ... rozdělení oblastí



b)



+1 okolí y
+1 okolí x
+1 1. a 3. kvadrant

c) $[0, y]$, $y \geq 0$ nestabilní +1

$[0, y]$, $y < 0$ stabilní, ale ne asymptoticky +1

(B3)

$x' = -y + xy + 2x^2 y$

$y' = x - xy$

a) $x' = y(2x^2 + x - 1)$

$y' = x(1-y)$

$2x^2 + x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix}$

- $y = 0 \overset{+1}{\Rightarrow} x = 0$ $\quad [0,0]$ +1
- $x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1$ $\quad [\frac{1}{2}, 1]$ +1
- $x = -1 \Rightarrow y = 1$ $\quad [-1, 1]$ +1

b) $\nabla f = \begin{pmatrix} y + 4xy & -1 + x + 2x^2 \\ 1 - y & -x \end{pmatrix}$ +1

$[0,0]$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$ $\quad$ nelze rozhodnout +1

$[\frac{1}{2}, 1]$ $\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}; 3$ $\quad$ nestabilní +1

$[-1, 1]$ $\quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_2 = 1$ $\quad$ nestabilní

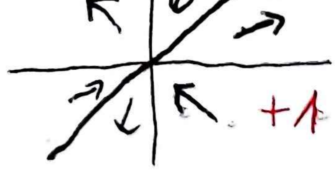
c) $x = r\cos\alpha, \; y = r\sin\alpha$

$r'\cos\alpha - r\sin\alpha\,\alpha' = -r\sin\alpha + r^2 \sin\alpha\cos\alpha + 2r^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$

$r'\sin\alpha + r\cos\alpha\,\alpha' = r\cos\alpha - r^2\sin\alpha\cos\alpha$

$\mathrm{I}.\cos + \mathrm{II}.\sin$: $\quad r' = r^2 \sin\alpha\cos\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) + 2r^3 \sin\alpha\cos^3\alpha$

$r' = r^2\left(\underbrace{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}_{\substack{>0 \\ (0,\frac{\pi}{2}),(\pi,\frac{3\pi}{2})}}\underbrace{(\cos\alpha - \sin\alpha)}_{\substack{>0 \\ (0,\frac{\pi}{4}),(\frac{5\pi}{4},2\pi)}} + 2r\sin\alpha\cos^3\alpha\right)$ +2



+1