Písemná zkouška z ODR
17.6.2025, Termín C

1. Uvažujte diferenciální rovnici

$$x' = 2tx - x^2$$

(a) Vyznačte v rovině oblasti, kde řešení roste, kde klesá a kde má nulovou derivaci a načrtněte průběhy řešení.

(b) Ukažte, že řešení jsou ve druhém kvadrantu konvexní a ve čtvrtém kvadrantu konkávní.

(c) Dochází u kladných řešení k blow-upu pro $t \to +\infty$? Zdůvodněte.

2. Buď $\phi(t, \mu)$ řešicí funkce soustavy

$$\begin{aligned} x' &= xy - 2, \qquad & x(0) &= 2 \\ y' &= 2 - 2y^3, \qquad & y(0) &= \mu \end{aligned}$$

(a) Napište rovnici ve variacích pro $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 1)$.

(b) Vypočtěte $\frac{\partial \phi}{\partial \mu}$ v bodě $(t, 1)$.

(c) Napište rovnici ve variacích pro $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mu^2}$ v bodě $(t, 1)$.

3. Uvažujte soustavu

$$\begin{aligned} x' &= \sin(2x + 3y) - 3y + x^2 y \\ y' &= \sin(xy) + 2x + 3yz^2 \\ z' &= xy + z - 3ye^x \end{aligned}$$

(a) Najděte linearizaci soustavy v počátku.

(b) Rozhodněte o stabilitě nulového řešení příslušné lineární soustavy.

(c) Pro lineární soustavu najděte X_+, X_-, X_c.

Za každou úlohu je možné získat až 10 bodů, a to 4 body za část (a) a po třech bodech za části (b) a (c). K úspěšnému složení zkoušky je nutné získat aspoň 15 bodů.

$$x' = 2tx - x^2 = x(2t - x)$$ (C1)

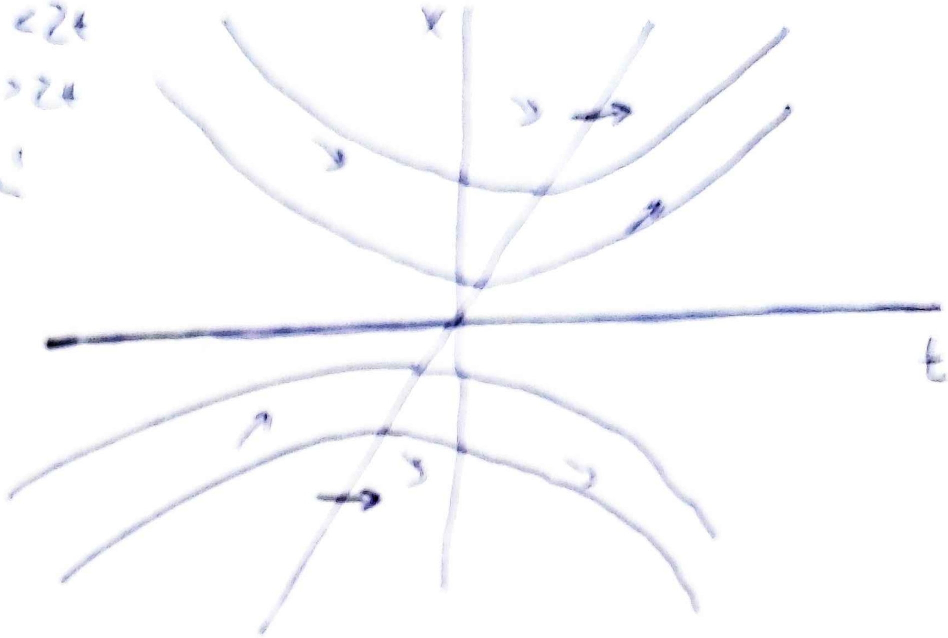
a) $x' > 0$ $\quad x > 0$ & $x < 2t$

$\qquad\qquad\quad x < 0$ & $x > 2t$

$x \equiv 0$ stacionární řešení

+2 šipky

+2 grafy



b) $$x'' = 2x + 2tx' - 2xx' = 2x + (2t - 2x)\,x\,(2t - x)$$

$$= 2x\big(1 + (t - x)(2t - x)\big) \qquad +1{,}5$$

2. kvadrant $\quad x > 0,\ t < 0 \Rightarrow t - x < 0,\ 2t - x < 0$

$\qquad \Rightarrow 2x\big(1 + (t - x)(2t - x)\big) > 0 \Rightarrow x'' > 0 \qquad +1{,}5$

4. kvadrant $\quad x < 0,\ t > 0 \Rightarrow t - x > 0,\ 2t - x > 0$

$\qquad \Rightarrow 2x(\ \dots\ ) < 0 \Rightarrow x'' < 0$

c) Nedochází +1: každé řešení splňuje $x(t) < 2t$ +1 pro dost velká t. Protože $x'(t) = 0$ v bodech $x(t) = 2t$, přechází řešení přes přímku $x = 2t$ z oblasti $x > 2t$ do $x < 2t$ a nikdy naopak. Protože všechna řešení jsou pro $x > 2t$ klesající a nenapojí se na nulové řešení, musí někde +1 přímku $x = 2t$ protnout.

$x' = xy - 2 \qquad x(0) = 2 \qquad \Phi(t,\mu) \sim (t,1)$ C2

$y' = 2 - 2y^3 \qquad y(0) = \mu$

a) $\frac{\partial \phi}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \nabla_{xy} f(x,y) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\nabla_{xy} f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -6y^2 \end{pmatrix} +1$$

řešení x, y pro $\mu = 1$ ... $y \equiv 1$; $x' = x - 2$

$x(t) = e^t + 2$ ... $x \equiv 2$ stac. řešení $+1$

$$\boxed{\begin{matrix} u' = u + 2v & u(0) = 0 \\ v' = -6v \;\; +1 & v(0) = 1 \;\; +1 \end{matrix}} \qquad \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & -6y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

b) $v(t) = e^{-6t} \cdot c \;,\; c = 1 \; +1$

$u' = u + 2 \cdot e^{-6t} \qquad (e^{-t} u(t))' = e^{-t} \cdot 2e^{-6t} = 2e^{-7t}$

$\underline{\frac{\partial \phi}{\partial \mu}(t,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}(e^t - e^{-6t}) \\ e^{-6t} \end{pmatrix}} \qquad e^{-t} u(t) = -\frac{2}{7} e^{-7t} + d$

$u(t) = -\frac{2}{7} e^{-6t} + d e^t$

$u(0) = 0 \Rightarrow d = \frac{2}{7}$

$u(t) = \frac{2}{7}(e^t - e^{-6t}) \; +2$

c) $\begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{pmatrix}' = \nabla_{x,y,u,v} F \begin{pmatrix} u \\ v \\ z \\ w \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} xy - 2 \\ 2 - 2y^3 \\ yu + xv \\ -6y^2 v \end{pmatrix}$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & -6y^2 & 0 & 0 \\ v & u & y & x \\ 0 & -12yv & 0 & -6y^2 \end{pmatrix}$$

$z' = vu + uv + yz + xw = 2e^{-6t}(e^t - e^{-6t})\frac{2}{7} + z + 2w$

$w' = -12yv^2 - 6y^2 w = -12e^{-12t} - 6w$

$z(0) = 0$

$w(0) = 0$

C3

$$x' = \sin(2x+3y) - 3y + x^2 y$$
$$y' = \sin(xy) + 2x + 3yz^2$$
$$z' = xy + z - 3ye^x$$

a) $\nabla F(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A$ $+4$

(+3 ∇F ; +1 dosazení)

b) $\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$ $+1$

$\lambda_{1,2,3} = 0, 1, 2$ $+1$

nestabilní $+1$

c) $X_- = \{0\}$ $+1$

$\lambda_1 = 0$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad X_c = \langle (0,1,3) \rangle$ $+1$

$\lambda_2 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad X_+ = \langle (0,0,1), (1,1,-3) \rangle$

$+1$

$\lambda_3 = 2$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$