

## Vyšetřování konvergence řad

V následujícím textu se zabýváme řadou  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Symbolem K se rozumí konvergence, symbolem AK absolutní konvergence, symbolem NAK neabsolutní konvergence (tj. konvergence, o které víme, že není absolutní), symbol D znamená divergenci.

**1. Absolutní a neabsolutní konvergence.** Pokud řada střídá znaménka (tj. typicky obsahuje  $(-1)^n$ ), musíme zvlášť vyšetřovat AK a K. Pokud nestřídá znaménka, stačí vyšetřit AK, protože K vyjde stejně jako AK.

### 2. Doporučené pořadí vyšetřování.

- AK.** Pomocí srovnávacího kritéria, resp. limitního srovnávacího kritéria, Cauchyova odmocninového kritéria nebo D'Alambertova podílového kritéria (příp. kondenzačního nebo Raabeho). Pokud je řada AK, jsme hotovi. Pokud není AK a nestřídá znaménka, je D a jsme také hotovi. Pokud není AK a střídá znaménka, může být NAK nebo D. Pokračujeme tedy dále.
- D.** Pokud jsme AK vyloučili pomocí podílového nebo odmocninového kritéria, tj.  $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$ , nebo  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , pak není splněna nutná podmínka (tj.  $\lim a_n \neq 0$ ) a řada je D. Pokud jsme AK vyloučili pomocí jiného kritéria, vyšetříme nutnou podmínku. Pokud není splněna, je řada D. Pokud je splněna, pokračujeme dále.
- NAK.** Zkusíme použít Leibnizovo kritérium, tj. ověřit předpoklady (příp. Abelovo a Dirichletovo, ty se dozvíte v dalších semestrech). Pokud lze použít, řada je NAK. Pokud nelze použít, musíme použít nějaký nestandardní postup ke zjištění, zda je řada NAK nebo D.

### 3. Jaké kritérium zvolit pro AK.

- Odmocninové kritérium* se obvykle používá na řady obsahující  $n$ -té mocniny. Např.  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ,  $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ .
- Podílové kritérium* se obvykle používá na řady obsahující  $n$ -té mocniny případně faktoriály. Např.  $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ ,  $a_n = \frac{3^n}{n!}$ .
- Limitní srovnávací kritérium* se obvykle používá na řady neobsahující  $n$ -té mocniny ani faktoriály, případně chceme-li si zjednodušit složitý výraz (s následným použitím jiného kritéria na zjednodušený výraz). Např.  $a_n = \frac{n+2}{n^2+1}$  srovnáme s  $\frac{1}{n}$ , řada D;  $a_n = \frac{3^n+1}{n!+n}$  srovnáme s  $\frac{3^n}{n!}$  a použijeme podílové kritérium.
- Srovnávací kritérium* (nelimitní) je potřeba použít, pokud  $a_n$  roste jako  $1/\ln n$ ,  $\ln n/n$  apod. Používáme odhady  $1 < \ln n < n^\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  libovolné. Jinak je obvykle výhodnější použít limitní verzi. Např.  $a_n = \frac{1}{\ln n} > n^{-1/2}$ , D;  $a_n = \frac{\ln n}{n^2} < n^{-3/2}$ , AK.