Centrální varieta

Je dán stacionární bod $X_0 \in \mathbb{R}^N$ rovnice

$$X' = F(X). \tag{0}$$

Nechť F je alespoň třídy C^1 na okolí X_0. Označme $M = \nabla F(X_0)$. Předpokládejme, že $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(M)$, avšak existuje $\hat{\lambda} \in \sigma(M)$ takové, že $\operatorname{Re}\hat{\lambda} = 0$. Toto je přesně ta jediná situace, kdy o stabilitě bodu X_0 nelze rozhodnout na základě vět o linearizaci. Přesněji řečeno, není obecně žádná souvislost mezi stabilitou bodu X_0 a stabilitou počátku rovnice $Y' = MY$.

V uvedené situaci lineární členy nestačí k rozhodnutí o (ne)stabilitě. V této kapitole si ukážeme, že chování rovnice lze vyloučením nezajímavé stabilní dynamiky (která odpovídá vlastním vektorům pro $\operatorname{Re}\lambda < 0$) v okolí X_0 redukovat na tzv. *centrální varietu* (c.v.) Uvidíme, že dynamiku na centrální varietě lze libovolně přesně aproximovat a posléze tím vyřešit původní problém stability bodu X_0.

Poznámka. Důkazy níže uváděných vět lze nalézt v kapitole 2 knihy *J. Carr: Applications of centre manifold theory, Springer 1981*, odkud jsme převzali i některé z příkladů.

Předpokládejme, že $X_0 = 0$ a že systém (0) převedeme vhodnou záměnou proměnných na tvar

$$\begin{aligned} x' &= Ax + f(x, y) \\ y' &= By + g(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

kde $X = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, a platí

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}\sigma(A) = 0 \\ \operatorname{Re}\sigma(B) < -\beta < 0 \\ f(0,0) = g(0,0) = 0 \\ \nabla f(0,0) = \nabla g(0,0) = 0 \end{gathered} \tag{P}$$

Vektor x respektive y nazýváme centrální resp. stabilní proměnné.

Definice 1. Hladká funkce $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, splňující $\phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$, se nazývá *centrální varieta* systému (1), jestliže platí: existuje $\mathcal{U}$ okolí bodu $(0,0)$ takové, že je-li $(x(t), y(t))$ řešení (1), pak

$$y(0) = \phi(x(0)) \implies y(t) = \phi(x(t)) \quad \forall t \text{ taková, že } (x(t), y(t)) \in \mathcal{U}. \tag{INV}$$

Podmínku (INV) nazveme pracovně *princip invariance*; říká nám, že graf ϕ, přesněji množina $\{(x,y);\ y=\phi(x)\}\cap\mathcal{U}$, je invariantní vůči řešením (1).

Princip invariance je ekvivalentní *principu redukce*: je-li p řešení ,,redukované rovnice"

$$p' = Ap + f(p, \phi(p)), \tag{2}$$

pak $(x(t), y(t)) := (p(t), \phi(p(t)))$ je řešením původní soustavy (1) pro všechna t, splňující $(p(t), \phi(p(t))) \in \mathcal{U}$. (Netriviálním požadavkem zde je splnění *druhé* rovnice v (1).)

Věta 1. *Nechť jsou splněny předpoklady* (P)*, nechť funkce f, g jsou alespoň třídy C^2 na okolí* $(0,0)$*. Pak existuje centrální varieta systému* (1) *a je též třídy C^2 na okolí* 0.

Poznamenejme, že centrální varieta není určena jednoznačně (viz úloha 1 níže.) Jsou-li f, g třídy C^k, lze mít c.v. též třídy C^k, leč příslušné okolí se při rostoucím k zmenšuje: obecně nemusí existovat analytická c.v. (úloha 2), dokonce ani c.v., která je C^∞ na okolí počátku.

Roli centrální variety lze chápat tak, že umožňuje řešit obě části soustavy (1) zvlášť. Stabilní část y má nezajímavou dynamiku a její působení na centrální část x lze vyjádřit pomocí funkcionálního vztahu $y = \phi(x)$. Stačí tedy řešit redukovanou rovnici (2), v níž jsou obsaženy všechny podstatné informace o chování celého systému v okolí počátku.

Exaktně je tento fakt vyjádřen následujícím tvrzením.

Lemma 2. *Nechť* 0 *je stabilní řešení rovnice* (2)*. Potom ke každému řešení* $(x(t), y(t))$ *rovnice* (1) *s dostatečně malou počáteční podmínkou* $(x(0), y(0))$ *existuje $p(t)$ řešení rovnice* (2) *takové, že*

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= \phi(p(t)) + \mathcal{O}(e^{-\gamma t}) \end{aligned}$$

pro $t \to \infty$, kde $\gamma > 0$ je vhodná konstanta.

Jinými slovy: předpokládáme-li stabilitu redukované rovnice, pak každé řešení původní rovnice lze s exponenciálně malou chybou aproximovat řešením, ležícím na centrální varietě. Říkáme též, že centrální varieta má ,,stopovací vlastnost" (tracking property).

Snadným důsledkem předchozího lemmatu je následující ,,princip redukované stability".

Věta 3. *Nechť ϕ je centrální varieta systému* (1)*. Bod* $(0,0)$ *je stabilní (asymptoticky stabilní, nestabilní) pro* (1)*, právě když bod* 0 *má analogickou vlastnost pro* (2).

Aproximace centrální variety

Vraťme se k původnímu problému: stabilita bodu $(0,0)$ pro soustavu (1). Věta na konci předchozí sekce problém řeší jen v teoretické poloze: prakticky nám k ničemu není, nejsme-li schopni určit centrální varietu ϕ.

Podle principu redukce je ϕ centrální varietou, právě když $(x(t), y(t)) := (p(t), \phi(p(t)))$ je řešením (1), jakmile p řeší (2). Rovnice $(1)_2$ požaduje

$$\begin{aligned}\big(\phi(p)\big)' = \nabla\phi(p)p' = B\phi(p) + g(p, \phi(p))\\ \nabla\phi(p)\big(Ap + f(p, \phi(p))\big) = B\phi(p) + g(p, \phi(p))\end{aligned}$$

Vidíme, že ϕ je centrální varieta, právě když poslední identita platí pro každé řešení rovnice (2) v okolí 0. To však zjevně platí právě tehdy, když $M[\phi] \equiv 0$ v okolí 0, kde

$$M[\phi](x) = \nabla\phi(x)\big(Ax + f(x, \phi(x))\big) - B\phi(x) - g(x, \phi(x)). \tag{3}$$

Řešit tuto parciální diferenciální rovnici obecně neumíme. Z praktického hlediska však plně postačuje následující věta o aproximaci:

Věta 4. *Nechť $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je C^1 funkce, splňující $\psi(0) = \nabla\psi(0) = 0$. Nechť $M[\psi](x) = \mathcal{O}(|x|^q)$, $x \to 0$ pro jisté $q > 1$. Potom existuje centrální varieta ϕ, splňující $\phi(x) - \psi(x) = \mathcal{O}(|x|^q)$, $x \to 0$.*

Příklad 1. Vyšetřete stabilitu počátku soustavy

$$\begin{aligned}x' &= -x^3 + y^2,\\ y' &= -2y + x^2.\end{aligned}$$

Řešení. Jde o soustavu tvaru (2), kde $m = n = 1$, $A = 0$, $B = -2$, $f = -x^3 + y^2$ a $g = x^2$. Dle Věty 1 hledáme centrální varietu tvaru $y = \phi(x)$. Výraz pro aproximaci (3) je

$$M[\phi](x) = \phi'(x)\big(-x^3 + \phi^2(x)\big) - \big(-2\phi(x) + x^2\big).$$

Volme $\psi(x) = 0$. Potom $M[\psi] = -x^2$; dle Věty 4 je c.v. tvaru $\phi(x) = 0 + \mathcal{O}(x^2)$. Redukovaná rovnice má tedy tvar

$$p' = -p^3 + \big(0 + \mathcal{O}(p^2)\big)^2 = -p^3 + \mathcal{O}(p^4).$$

Tato rovnice je asymptoticky stabilní v nule (viz úloha 4); totéž tedy platí pro počátek původní soustavy.

Příklad 2. Vyšetřete stabilitu počátku soustavy

$$x' = x^2 y^3$$
$$y' = -2y - y^3 + ax^3$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení. Opět vidíme, že x je centrální, y stabilní proměnná. Výraz pro aproximaci má tvar

$$M[\psi](x) = \psi'(x)x^2\psi^3(x) + 2\psi(x) + \psi^3(x) - ax^3.$$

Pokud $a = 0$, je $M[0](x) = 0$; tedy funkce $\phi(x) = 0$ je přímo rovna c.v. Redukovaná rovnice má tvar

$$p' = 0.$$

Tedy počátek je stabilní, ne však asymptoticky stabilní.

Pokud $a \neq 0$, hledejme aproximaci ve tvaru $\psi(x) = cx^2$. Máme

$$M[\psi](x) = 2c^3x^7 + 2cx^2 + c^3x^6 - ax^3.$$

Volba $c = 0$ dává $M[\psi](x) = -ax^3$, tedy c.v. splňuje $\phi(x) = 0 + \mathcal{O}(x^3)$. Z této informace ovšem nelze o stabilitě redukované rovnice nic říci:

$$p' = p^2\big(\mathcal{O}(p^3)\big);$$

o znaménku pravé strany nemáme informaci. Pokud volíme $\psi(x) = cx^2$, kde $c \neq 0$, je situace podobná, neboť pak $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^2)$, tedy $\phi(x) = cx^2 + \mathcal{O}(x^2)$; znaménko $\phi(x)$ opět neumíme určit.

Hledejme tedy aproximaci $\psi(x) = cx^3$. Máme

$$M[\psi](x) = 3c^4x^{13} + 2cx^3 + c^3x^9 - 2x^3.$$

Volba $c = 1$ dá $M[\psi](x) = \mathcal{O}(x^9)$; tedy

$$\phi(x) = x^3 + \mathcal{O}(x^9).$$

Redukovaná rovnice nám říká, že

$$p' = p^2\big(p^3 + \mathcal{O}(p^9)\big)^3 = p^2\big(p^9 + \mathcal{O}(p^{15})\big) = p^{11} + \mathcal{O}(p^{17}).$$

Tedy počátek je nestabilní.

Příklad 3. Vyšetřete stabilitu počátku pro soustavu

$$\begin{aligned} x' &= x(y-z) \\ y' &= -2y + z + x^2 - z^2 \\ z' &= y - 3z + xyz \end{aligned}$$

Řešení. Zde máme $n = 1$, $m = 2$; kde x je centrální, (y, z) stabilní proměnné. Příslušné matice jsou $A = 0$ a

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$

s vlastními čísly $(-5 \pm \sqrt{5})/2 < 0$. Centrální varieta má tedy tvar $y = \phi_1(x)$, $z = \phi_2(x)$; analogicky aproximace M má dvě složky:

$$\begin{aligned} M_1[\psi](x) &= \psi_1'(x)x\big(\psi_1(x) - \psi_2(x)\big) + 2\psi_1(x) - \psi_2(x) - x^2 - \psi_2^2(x) \\ M_2[\psi](x) &= \psi_2'(x)x\big(\psi_1(x) - \psi_2(x)\big) - \psi_1(x) + 3\psi_2(x) - x\psi_1(x)\psi_2(x) \end{aligned}$$

Zkusme nulovou aproximaci, tj. $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Potom $M = \mathcal{O}(x^2)$, tedy $\phi_i(x) = \mathcal{O}(x^2)$, pro $i = 1, 2$. Redukovaná rovnice

$$p' = p\big(\phi_1(p) - \phi_2(p)\big)$$

nám ovšem neřekne nic. – Zkusme aproximaci

$$\psi_1(x) = ax^2, \quad \psi_2(x) = bx^2.$$

První a poslední sčítanec v M_1, M_2 jsou alespoň $\mathcal{O}(x^4)$. Zkusme vynulovat zbývající členy, tj.

$$\begin{aligned} 2\psi_1(x) - \psi_2(x) &= x^2 \\ -\psi_1(x) + 3\psi_2(x) &= 0 \end{aligned}$$

Řešením je $a = 3/5$, $b = 1/5$. Získáváme aproximaci c.v. tvaru

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{3}{5}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{5}x^2 + \mathcal{O}(x^4) \end{aligned}$$

Redukovaná rovnice dává

$$p' = p\big(\frac{3}{5}p^2 - \frac{1}{5}p^2 + \mathcal{O}(p^4)\big) = \frac{2}{5}p^3 + \mathcal{O}(p^5)$$

Počátek je nestabilní.

Příklad 4. Vyšetřete stabilitu počátku soustavy

$$x' = x - \sin y,$$
$$y' = 2\sin x - 2y.$$

Řešení. Matice linearizované soustavy

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla 0 a -1. Odpovídající vektory $(1,1)$ a $(1,2)$ určují centrální, respektive stabilní směr. Označme příslušné proměnné u, v; tedy

$$x = u + v, \qquad y = u + 2v.$$

V nových souřadnicích máme soustavu

$$u' = 4u + 6v - 2\sin(u+2v) - 2\sin(u+v),$$
$$v' = -3u - 5v + \sin(u+2v) + 2\sin(u+v).$$

Centrální varieta má tvar $v = \phi(u)$. Rovnice pro aproximaci jest

$$\begin{aligned} M[\phi](u) &= \phi'(u)\big(4u + 6\phi(u) - 2\sin(u+2\phi(u)) - 2\sin(u+\phi(u))\big) \\ &\quad - \big(-3u - 5\phi(u) + \sin(u+2\phi(u)) + 2\sin(u+\phi(u))\big). \end{aligned}$$

Volba $\psi(u) = cu^2$ dává v nejlepším případě $c = 0$ aproximaci $\phi(u) = \mathcal{O}(u^3)$, což je k ničemu.

Zkusme $\psi(u) = cu^3$. Uvážíme-li, že

$$\sin(u + au^3) = u + au^3 - \frac{1}{6}(u+au^3)^3 + \mathcal{O}(u^5) = u + (a - \frac{1}{6})u^3 + \mathcal{O}(u^5), \quad (4)$$

je první řádek v $M[\psi](u)$ aspoň $\mathcal{O}(u^5)$. Druhý řádek (bez znaménka minus) aproximujeme jako

$$\begin{aligned} &-3u - 5cu^3 + u + 2cu^3 - \frac{1}{6}u^3 + 2(u + cu^3) - \frac{2}{6}u^3 + \mathcal{O}(u^5) \\ &= \big(-5c + 2c + 2c - \frac{1}{6} - \frac{2}{6})u^3 + \mathcal{O}(u^5). \end{aligned}$$

Koeficient u u^3 vynulujeme volbou $c = -1/2$. Tedy c.v. splňuje $\phi(u) = -u^3/2 + \mathcal{O}(u^5)$. Redukovaná rovnice (opět s využitím (4)) je tvaru

$$\begin{aligned} p' &= 4p + 6\big(-\tfrac{1}{2}p^3 + \mathcal{O}(p^3)\big) - 2\sin(p - p^3 + \mathcal{O}(p^3)) - 2\sin(p - \tfrac{1}{2}p^3 + \mathcal{O}(p^3)) \\ &= 4p - 3p^3 - 2\big(p - p^3 - \frac{1}{6}p^3 + \mathcal{O}(p^3)\big) - 2\big(p - \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{6}p^3 + \mathcal{O}(p^3)\big) \\ &= \frac{2}{3}p^3 + \mathcal{O}(p^3). \end{aligned}$$

Počátek je nestabilní.

Příklad 5. Vyšetřete chování systému v okolí počátku

$$\begin{aligned} x' &= \varepsilon x - x^3 + xy \\ y' &= -y + y^2 - x^2 \end{aligned} \tag{5}$$

pro ε blízká 0.

Řešení. Linearizací dostáváme matici

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tedy počátek je stabilní pro $\varepsilon < 0$, nestabilní pro $\varepsilon > 0$; pro $\varepsilon = 0$ máme v počátku bifurkaci. Použijeme trik s přidáním rovnice pro ε, tj.

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 0 \\ x' &= \varepsilon x - x^3 + xy \\ y' &= -y + y^2 - x^2 \end{aligned} \tag{6}$$

To je již systém tvaru (1) – centrální proměnné $X = (\varepsilon, x)$, stabilní proměnná y; A je nulová matice 2×2, $b = -1$, $f = (0, \varepsilon x - x^2 + xy)$, $g = y^2 - x^2$.

Existuje tedy centrální varieta $y = \phi(\varepsilon, x)$. Rovnice pro aproximaci je

$$\begin{aligned} M[\phi] &= \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} 0 + \frac{\partial \phi}{\partial x}\big(\varepsilon x - x^3 + x\phi\big) - \big(-\phi + \phi^2 - x^2\big) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\big(\varepsilon x - x^3 + x\phi\big) + \phi - x^2 + \phi^2. \end{aligned}$$

Zkusme $\psi = 0$. Potom $M[\psi] = -x^2 = \mathcal{O}(|X|^2)$. Redukovaná rovnice má tvar

$$p' = \varepsilon p - p^3 + p\mathcal{O}(|P|^2) = p\big(\varepsilon - p^2 + \mathcal{O}(|P|^2)\big),$$

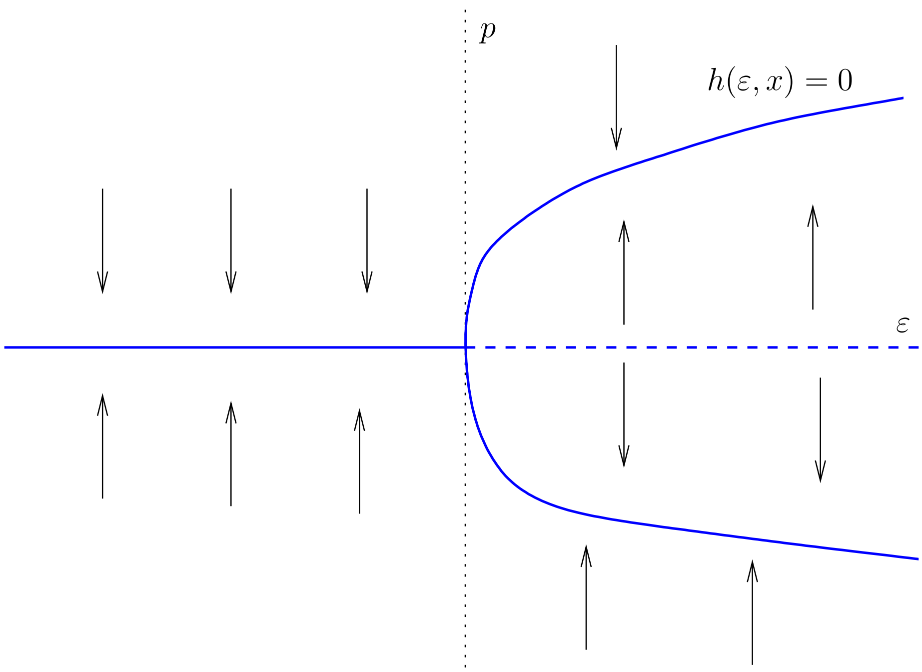
kde značíme $P = (\varepsilon, p)$. Stabilita počátku pro $\varepsilon = 0$ odsud stále není jasná.

Zkusme lepší aproximaci $\psi = x^2$. Potom $M[\psi] = 2x(\varepsilon x) + x^4 = \mathcal{O}(|X|^3)$. Redukovaná rovnice má tvar

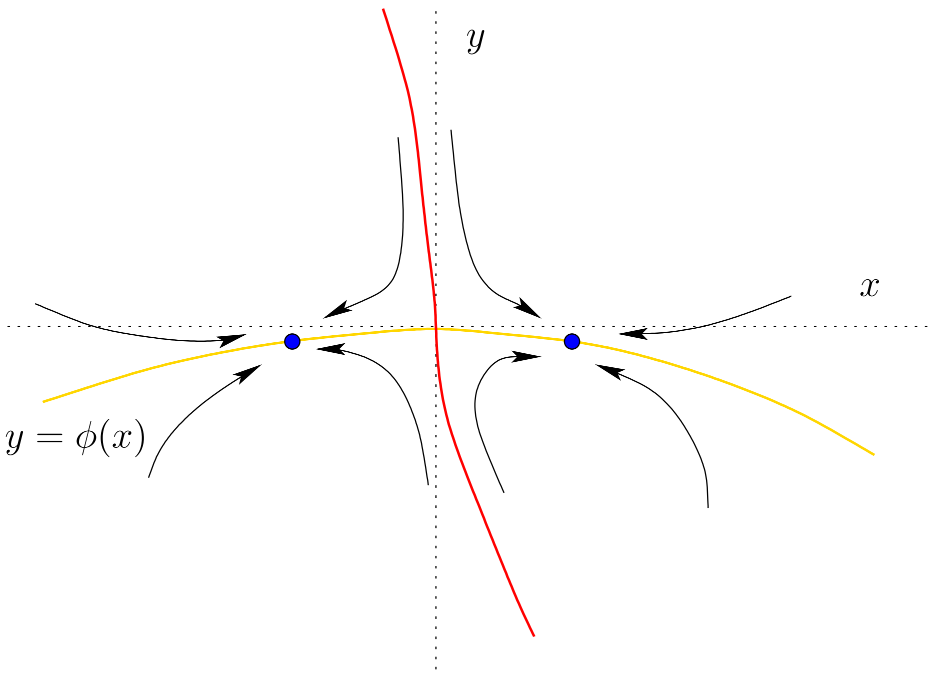
$$p' = p\,\underbrace{\big(\varepsilon - 2p^2 + \mathcal{O}(|P|^3)\big)}_{h(\varepsilon,p)}. \tag{7}$$

Poznamenejme, že $\mathcal{O}(|P|^3)$ zde zastupuje (hladkou) funkci, jejíž derivace do řádu *dva* včetně v počátku jsou nulové, speciálně platí $\mathcal{O}(|P|^3) \le K(|\varepsilon|^3 + |p|^3)$. Odsud vidíme, že pro $\varepsilon = 0$ je počátek asymptoticky stabilní. Obecněji, pro funkci h platí $h(0,0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(0,0) = 1$, $\frac{\partial h}{\partial p}(0,0) = 0$ a $\frac{\partial^2 h}{\partial p^2}(0,0) = -4$. Pomocí věty o implicitní funkci odvodíme, že množina $h(\varepsilon, p) = 0$ je v okolí počátku grafem funkce $\varepsilon = 2p^2 + \mathcal{O}(p^3)$; odsud dostáváme bifurkační diagram rovnice (7) – viz obrázek 1.

Nyní máme celkovou představu o chování řešení soustavy (5) v okolí počátku v závislosti na ε blízko nuly. Pro $\varepsilon \leq 0$ je počátek asymptoticky stabilní. Pro $\varepsilon > 0$ je situace jako na obrázku 2. Ve směru stabilní variety (červená) se řešení exponenciálně blíží k centrální varietě (zlatá), která obsahuje kromě nestabilního počátku dva stabilní stacionární body (modré).



Obrázek 1: Bifurkace rovnice (7): „vidličková“.



Obrázek 2: Řešení rovnice (5) pro $\varepsilon > 0$.