

Úlohy

1. (a) Nechť v je vlastní vektor matice A , příslušný vlastnímu číslu λ . Potom v je též vlastní vektor matice e^A , příslušný vlastnímu číslu e^λ .
(b) Dokažte větu o obrazu spektra: $\sigma(e^A) = \{e^\lambda; \lambda \in \sigma(A)\}$.

2. Dokažte, že $\det e^A = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr} A}$, kde λ_i jsou vlastní čísla A , a $\operatorname{tr} A$ je stopa (součet diagonálních prvků).

3. Logaritmus matice. Buď $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Pokud $A^3 = 0$ a $L := A - A^2/2$, pak $e^L = I + A$.

(b) Konverguje-li řada $L := A - A^2/2 + A^3/3 + \dots$, potom je $e^L = I + A$.

* (c) Pro danou matici A najděte matici B tak, že $A = e^B$.

4. Pro následující matice A najděte matice B takové, že $A = e^B$ (s využitím výsledku předchozí úlohy).

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 1 & 2 \\ 0 & e & 3 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Je dána matice A . Existuje vždy B tak, že $B^2 = A$?

(b) Najděte odmocninu matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Pro libovolnou čtvercovou matici A definujeme ($A^0 = I$)

$$\sin A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \quad \cos A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n}$$

(a) Ukažte, že uvedené řady konvergují.

(b) Ukažte, že $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = I$.

(c) Platí $e^{A+iB} = e^A(\cos B + i \sin B)$ pro všechny dvojice matic A, B nebo jen pro některé?

(d) Platí $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ pro všechny dvojice matic A, B nebo jen pro některé?

7. Vypočtěte $\sin A$ (bez použití Jordanova tvaru) pro následující matice A

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Necht A je antisymetrická (tj. $A^T = -A$.) Potom e^A je ortogonální.

9. Necht $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ má jednonásobná vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Buď P takový polynom, že $P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$, $i = 1, \dots, n$. Pak $e^A = P(A)$. Dokažte.

10. !! Cauchyův vzorec říká $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z - a)^{-1} dz$, kde γ je kladně orientovaná kružnice se středem a .

(a) Ukažte, že

$$e^A = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^z (zI - A)^{-1} dz,$$

kde γ je taková kružnice se středem v 0 a poloměru větším než $\|A\|$.

(b) Spočítejte touto metodou e^A pro následující matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$