

Maticová exponenciála a řešení soustav lineárních rovnic

V této podkapitole se budeme zabývat vlastnostmi funkce

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \Phi : t \mapsto e^{tA}.$$

Mimo jiné ukážeme, že ΦC je řešením soustavy $Y' = AY$ pro každý vektor $C \in \mathbb{R}^n$.

Nejprve si uvědomme, že z odhadu (3) (v minulé podkapitole) plyne pro $t \in [-K, K]$

$$\left\| \sum_{m=k}^l \frac{A^m t^m}{m!} \right\| \leq \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(K \|A\|)^m}{m!}. \quad (4)$$

Tedy řada konverguje lokálně stejnoměrně a funkce Y je tedy spojitá. Zderivujeme-li m -tý člen řady, získáme

$$f'_n(t) = \frac{1}{m!} A^m m t^{m-1} = A \frac{A^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Odhad (4) nám tedy dává také stejnoměrnou konvergenci derivací. Odtud plyne, že limitní funkce je diferencovatelná a lze ji derivovat člen po členu. Odtud ihned dostáváme

$$\Phi'(t) = \sum_{m=1}^{\infty} A \frac{A^{m-1} t^{m-1}}{(m-1)!} = A \Phi(t),$$

tedy funkce Φ splňuje rovnici (1) a $Y(t) = \Phi(t)C$ je řešení soustavy rovnic (1).

Příklad 2. Najděte fundamentální matici následující soustavy pomocí maticové exponenciály

$$\begin{aligned} x' &= 10x - 6y \\ y' &= 18x - 11y. \end{aligned}$$

Řešení. Vypočítáme vlastní čísla matice soustavy

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 10)(\lambda + 11) + 6 \cdot 18 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1).$$

Vlastní vektor příslušný $\lambda_1 = 1$ je v_1 splňující $(I - A)v_1 = 0$, tj. $v_1 = (2, 3)$. Vlastní vektor příslušný $\lambda_2 = -2$ splňuje $(-2I - A)v_2 = 0$, tj. $v_2 = (1, 2)$. Tedy

$$A = VJV^{-1} = V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} V^{-1},$$

kde

$$V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{tA} &= V e^{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & -2t \end{pmatrix}} V^{-1} = V \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} V^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{-2t} & -2e^t + 2e^{-2t} \\ 6e^t - 6e^{-2t} & -3e^t - 4e^{-2t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

což je fundamentální matice soustavy.

Poznámka. Uvědomte si, že pro každou regulární matici M je maticová funkce $\Phi(t)M$ také fundamentální maticí soustavy (vynásobením zprava nahradíme sloupce lineárními kombinacemi sloupců původní matice). Tedy i $V^{-1}e^{tJ}$ je fundamentální matice soustavy. Ale $\Phi(t) = Ve^{tJ}V^{-1}$ je jediná fundamentální matice, pro kterou platí $\Phi(0) = I$. Proto $\Phi(t)C$ je řešení soustavy splňující počáteční podmínku $Y(0) = C$.

Pro chování řešení soustavy pro $t \rightarrow +\infty$ je klíčový následující odhad, který hojně využijete v kapitole o stabilitě. Jeho důkaz je ponechán jako cvičení.

Tvrzení 1. Pro každé $\epsilon > 0$ existuje $M \geq 1$ takové, že platí

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{t(\alpha+\epsilon)} \quad \text{pro všechna } t \geq 0,$$

kde $\alpha := \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$.