Variace konstant - integrální tvar

Někdy se variací konstant rozumí vyjádření partikulárního řešení jako konvoluce pravé strany a vhodného řešení homogenní úlohy. Získaný explicitní vzorec je též užitečný díky vyjádření počátečních podmínek.

Zformulujme tvrzení pro jednoduchost pouze pro rovnici s konstantními koeficienty:

$$\mathscr{K}[y] = f(t)\,, \tag{10}$$

kde $\mathscr{K}[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n$.

Věta 4. *Nechť $\omega(t)$ je řešení homogenní úlohy $\mathscr{K}[y] = 0$ s počátečními podmínkami*

$$\begin{aligned} \omega(0) = \omega'(0) = \cdots = \omega^{(n-2)}(0) = 0\,, \\ \omega^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Potom

$$y_p(t) = \int_0^t \omega(t-s) f(s)\, ds \tag{12}$$

je řešení úlohy (10) *s nulovými počátečními podmínkami:*

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0\,. \tag{13}$$

Před důkazem se podívejme na dva ilustrativní příklady.

Příklad 4. Nalezněte obecné řešení rovnice $y'' + a^2 y = f(t)$.

Řešení. Fundamentální systém zvolme $y_1(t) = \cos at$, $y_2(t) = \frac{1}{a}\sin at$. Všimněme si, že $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, tj. y_2 je hledané ω – řešení homogenní úlohy s počátečními podmínkami (11). Tudíž $y_p(t) = \frac{1}{a}\int_0^t \sin[a(t-s)] f(s)\, ds$ a obecné řešení má tvar

$$y(t) = c_1 \cos at + \frac{c_2}{a}\sin at + \int_0^t \frac{\sin[a(t-s)]}{a} f(s)\, ds\,.$$

Porovnáním počátečních podmínek navíc zjistíme, že $c_1 = y(0)$, $c_2 = y'(0)$.

Příklad 5. Nechť $x(t)$ je C^2 funkce a $x''(t) + x'(t) + x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$. Potom $x(t) \to 0$ pro $t \to \infty$.

Řešení. Tuto úlohu (z řešitelského semináře) snadno vyřešíme pomocí Věty 1. Uvědomme si, že $x(t)$ je řešení úlohy

$$y'' + y' + y = f(t) \tag{14}$$

kde $f(t) := x''(t) + x'(t) + x(t)$. Charakteristický polynom má kořeny $(-1 \pm i\sqrt{3})/2$, tj. fundamentální systém tvoří funkce $\{y_1(t), y_2(t)\}$, kde $y_1(t) = \exp(-t/2)\cos\sqrt{3}t/2$, $y_2(t) = \exp(-t/2)\sin\sqrt{3}t/2$. Navíc $\omega(t) := 2y_2(t)/\sqrt{3}$ splňuje zjevně podmínky (11). Obecné řešení rovnice (14) (a tedy i $x(t)$) má tvar

$$c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t y_2(t-s) f(s)\, ds\,.$$

Tvrdíme, že toto jde do 0 pro $t \to \infty$. První dva členy jsou jasné, zbývá odhadnout integrál, což se provede standardním roztržením na dva kusy. Protože $f(t) \to 0$ pro $t \to \infty$, zvolím $K > 0$ tak, že $|f(t)| \le \varepsilon$ pro $t > K$. S využitím odhadu $|y_2(t-s)| \le \exp(-(t-s)/2)$ máme pro $t > K$

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^t y_2(t-s) f(s)\, ds\Big| &\le \int_0^K e^{-(t-s)/2} f(s)\, ds + \varepsilon \int_K^t e^{-(t-s)/2}\, ds \\ &= e^{-t/2} \int_0^K e^{s/2} f(s)\, ds + 2\varepsilon \underbrace{\left(1 - e^{-(t-K)/2}\right)}_{\le 1}\,. \end{aligned}$$

To je pro t dost velké menší než 3ε, čímž je důkaz hotov.

K důkazu Věty 1 je potřeba následující pomocné tvrzení, které je zajímavé samo o sobě.

Lemma 5. *Nechť*

$$F(t) = \int_0^t \phi(t,s)\, ds$$

kde ϕ je C^1 funkce. Potom

$$F'(t) = \phi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,s)\, ds\,.$$

Nyní můžeme provést důkaz Věty 4

Důkaz. Dosadíme jednoduše (12) do (10). Dle Lemmatu 5 je

$$y_p'(t) = \underbrace{\omega(0)}_{=0} f(t) + \int_0^t \omega'(t-s) f(s)\, ds = \int_0^t \omega'(t-s) f(s)\, ds$$

s využitím (11). Opakovaním téhož argumentu dostaneme

$$y_p^{(k)}(t) = \int_0^t \omega^{(k)}(t-s) f(s)\, ds\,, \qquad k = 0, \dots, n-1 \tag{15}$$

a konečně

$$y_p^{(n)}(t) = \underbrace{\omega^{(n-1)}(0)}_{=1/a_0} f(t) + \int_0^t \omega^{(k)}(t-s) f(s)\, ds\,,$$

Je tedy

$$\mathscr{K}[y_p](t) = a_0 \frac{1}{a_0} f(t) + \int_0^t \underbrace{\mathscr{K}[\omega]}_{=0}(t-s) f(s)\, ds = f(t)$$

neboť ω je řešení homogenní úlohy. Splnění počátečních podmínek (13) plyne z (15). $\square$

Nyní zformulujme variaci konstant v integrálním tvaru pro obecnou soustavu rovnic

$$Y' = A(t)Y + F(t), \tag{16}$$

kde $A : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ a $F : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ jsou spojité funkce. Připomeňme, že fundamentální matice soustavy je matice, jejíž sloupce tvoří fundamentální systém soustavy.

Věta 6 (Variace konstant - integrální tvar)**.** *Buď $t_0 \in (a,b)$ a Φ fundamentální matice soustavy* (16)*. Pak řešení nehomogenní úlohy* (16) *s počáteční podmínkou $Y(t_0) = Y_0$ je*

$$Y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}Y_0 + \Phi(t)\int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}F(s)ds.$$

Příklad 6. Uvažujme soustavu s konstantními koeficienty $Y' = AY + b(t)$, kde b je omezená na $[0,+\infty)$. Nechť vlastní čísla matice A jsou kladná. Pak existuje nejvýše jedno řešení, které je omezené na $[0,+\infty)$.

Řešení. Fundamentální maticí soustavy je exponenciála e^{tA} (viz kapitola o maticové exponenciále). Máme tedy

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds.$$

Po přenásobení e^{-tA} dostáváme

$$e^{-tA}Y(t) = Y_0 + \int_0^t e^{-sA}b(s)ds.$$

Je-li řešení Y omezené, musí platit

$$0 = Y_0 + \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-sA}b(s)ds = Y_0 + \int_0^{+\infty} e^{-sA}b(s)ds.$$

(integrál konverguje, protože vlastní čísla matice A jsou kladná, plyne např. z Jordanova tvaru). Takové Y_0 existuje nejvýše jedno.