Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 2. dubna 2022

5 Vlastní čísla a vlastní vektory

Cíle cvičení:

- Počítat vlastní čísla matic i lineárních operátorů a jejich algebraickou násobnost,
- umět najít všechny vlastní vektory.

Řešené příklady:

Úloha 5.1. Symbolem K_2 označme kanonickou bázi na prostoru $\mathbb{R}^2$. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$\text{(a)} \quad [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad [f]_{K_2}^{K_2} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

V obou případech ověřte, že je operátor f izomorfismus. Dále najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory operátorů f a f^{-1}.

Řešení. Snadno nahlédneme, že jsou obě matice regulární. Proto jsou oba operátory izomorfismy.

(a) Víme, že λ je vlastní číslo lineárního operátoru f, právě když je vlastním číslem matice $[\varphi]_{K_2}^{K_2}$. To je, právě když je matice

$$[f]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

singulární a tedy právě když je determinant této matice nulový. Protože se jedná o horní trojúhelníkovou matici, je tento determinant roven součinu prvků na její diagonále:

$$\det\left([f]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_n\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2.$$

Odtud je vidět, že operátor f má jediné vlastní číslo 3.

Množina vlastních vektorů matice $[f]_{K_2}^{K_2}$ odpovídá nulovému prostoru

$$\operatorname{Ker}\left([f]_{K_2}^{K_2} - 3I_n\right) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{LO}\left\{(1,0)^T\right\}.$$

Vlastních vektory operátoru f jsou právě vektory podprostoru $\operatorname{LO}\{(1,0)^T\}$.

Nyní poznamenejme, že f i f^{-1} jsou izomorfismy, proto nemohou mít dle tvrzení z přednášky vlastní čísla 0 a pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ a nenulové číslo λ máme $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v}$, právě když $\varphi^{-1}(\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\,\mathbf{v}$. Z definice vlastního čísla a vlastního vektoru tak dostáváme pozorování, že[1]

> $\mathbf{v}$ je vlastní vektor lineárního operátoru f příslušný vlastnímu číslu λ, právě když je to vlastní vektor lineárního operátoru f^{-1} příslušný vlastnímu číslu λ^{-1}.

[1] Za předpokladu, že f je izomorfismus.

Odtud bez dalšího počítání vidíme, že f^{-1} má jediné vlastní číslo $\frac{1}{3}$ a množina vlastních vektorů operátoru f^{-1} je $\mathrm{LO}\{(1,0)^T\}$.

(b) Abychom našli vlastní čísla lineárního operátoru f, spočítáme nejprve charakteristický polynom jeho matice:

$$\det\left([f]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_2\right) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = (\lambda-3)(\lambda-7).$$

Vlastní čísla matice $[f]_{K_2}^{K_2}$ jsou kořeny jejího charakteristického polynomu, tedy $\lambda = 3, 7$. Do matice $[f]_{K_2}^{K_2} - \lambda I_2$ dosadíme po řadě nalezená vlastní čísla a řešíme dvě singulární homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešením těchto soustav najdeme množinu všech vlastních vektorů $\mathrm{LO}\{(-1,1)^T\} \cup \mathrm{LO}\{(1,3)^T\}$. Podobně jako v (a) jsou vlastními čísly operátoru f^{-1} čísla $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{7}$ a množina vlastních vektorů je stejná jako u f. Všimněme si, že zatímco v případě (b) je možné z množiny všech vlastních vektorů vybrat bázi celého prostoru $\mathbb{R}^2$, v případě (a) to možné není. $\square$

Úloha 5.2. Nechť f je lineární operátor na podprostoru $\mathbf{V} = \mathrm{LO}\{(1,0,1)^T, (2,-1,0)^T\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$, pro který platí

$$f((1,0,1)^T) = (9,-4,1)^T \text{ a } f((2,-1,0)^T) = (-3,2,1)^T.$$

Spočítejte všechna vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory operátoru f.

Řešení. Najdeme matici f vzhledem k vhodně zvolené bázi prostoru $\mathbf{V}$. Nabízí se báze $B = ((1,0,1)^T, (2,-1,0)$
Spočítáme

$$[(9,-4,1)]_B = (1,4)^T \text{ a } [(-3,2,1)^T]_B = (1,-2)^T.$$

Odtud dostaneme, že

$$[f]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom operátoru f je roven charakteristickému polynomu matice $[f]_B^B$, který můžeme určit pomocí tvrzení o význačných koeficientech (koeficient u kvadratického členu je 1, koeficient u lineárního členu je minus součet prvků na diagonále, absolutní člen je rovný determinantu): $\lambda^2+\lambda-6 = (\lambda-2)(\lambda+3)$. Odtud vidíme, že vlastní čísla operátoru f jsou 2 a -3. Příslušné prostory vlastních vektorů vyjádřené v bázi B jsou potom[2]

$$[\mathbf{M}_2]_B = \mathrm{Ker}\left([f]_B^B - 2I_n\right) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(1,1)^T\right\},$$
$$[\mathbf{M}_{-3}]_B = \mathrm{Ker}\left([f]_B^B + 3I_n\right) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(1,-4)^T\right\}.$$

Z toho dopočteme, že

$$\mathbf{M}_2 = \mathrm{LO}\left\{(1,0,1)^T + (2,-1,0)^T\right\} = \mathrm{LO}\left\{(3,-1,1)^T\right\},$$
$$\mathbf{M}_{-3} = \mathrm{LO}\left\{(1,0,1) - 4(2,-1,0)^T\right\} = \mathrm{LO}\left\{(-7,4,1)^T\right\}.$$

$\square$

Úloha 5.3. Označme p ortogonální projekci reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem na rovinu $\mathbf{U} = \mathrm{LO}\{(1,2,3)^T, (1,0,1)^T\}$. Na p budeme pohlížet jako na lineární operátor na prostoru $\mathbb{R}^3$.

[2] Symbolem $\mathbf{M}_k$ značíme podprostor vlatních vektorů příslušných k vlastnímu číslu k.

(a) Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory p,

(b) Určete všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory matice $[p]_{K_3}^{K_3}$.

Řešení. (a) Nejprve si všimneme, že lineární operátor p není izomorfismem, protože není na. Proto je 0 jeho vlastní číslo (tj., existuje nenulový vektor $\mathbf{v}$ takový, že $p(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$). Vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 0 tvoří jádro $\mathrm{Ker}\, p = \mathbf{U}^{\perp} = \mathrm{LO}\{(1,1,-1)^T\}$. Protože na rovině $\mathbf{U}$ působí p jako identita, jedná se o podprostor všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1. Žádné další nenulové vlastní číslo nemůže existovat, protože jiné přímky než ty, které leží v $\mathbf{U}$ nejsou vzhledem k operátoru p invariantní. (Všimněme si, že pokud je $\mathbf{v}$ nenulový vlastní vektor příslušný nenulovému vlastnímu číslu λ operátoru p, pak p zachovává přímku $\mathrm{LO}\{\mathbf{v}\}$. Každý vektor $\mathbf{u} \in \mathrm{LO}\{\mathbf{v}\}$ je totiž tvaru $t\,\mathbf{v}$ pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ a platí, že $p(\mathbf{u}) = p(t\,\mathbf{v}) = tp(\mathbf{v}) = t\lambda\,\mathbf{v} \in \mathrm{LO}\{\mathbf{v}\}$.)

Geometrickými úvahami jsme zjistili, že lineární operátor ortogonální projekce má právě vlastní čísla 0 a 1 a množina vlastních vektorů je $\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{\perp}$.

(b) Využijeme-li tvrzení z přednášky, nemusíme nic počítat, protože vlastní čísla lineárního operátoru p a matice $[p]_{K_3}^{K_3}$ jsou shodná, tedy 0 a 1 a souřadnicové vektory vzhledem ke kanonické bázi se rovněž nemění, proto $\mathbf{U} \cup \mathbf{U}^{\perp} = \mathrm{LO}\left\{(1,2,3)^T, (1,0,1)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(1,1,-1)^T\right\}$ tvoří množinu všech vlastních vektorů matice $[p]_{K_3}^{K_3}$. □

Úloha 5.4. Najděte nad tělesem komplexních čísel charakteristické polynomy, všechna vlastní čísla včetně algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory matic

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \ \text{(b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \ \text{(c)} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Postupujeme obdobně jako v předchozích úlohách.

(a) Nejprve spočítáme charakteristický polynom

$$\det(A - \lambda I_1) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4).$$

Vidíme, že obě vlastní čísla matice A mají algebraickou násobnost 1, a zbývá spočítat příslušné vlastní vektory jako jádra

$$\mathrm{Ker}\,(A - 3I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(2,1)^T\right\},$$

$$\mathrm{Ker}\,(A - 4I_2) = \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(1,1)^T\right\}.$$

Zjistili jsme, že $\mathrm{LO}\left\{(2,1)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(1,1)^T\right\}$ je množina všech vlastních vektorů matice A.

(b) Charakteristický polynom je tentokrát

$$\det(B - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 + 2 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i),$$

tedy i a $-i$ jsou komplexní vlastní čísla matice, obě algebraické násobnost 1. Spočítáme vlastní vektory:

$$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(-1, 1-i)^T\right\} \quad \text{a} \quad \mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix} = \mathrm{LO}\left\{(-1, 1+i)^T\right\}.$$

Proto jsou $\mathrm{LO}\left\{(-1, 1-i)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(-1, 1+i)\right\}$ jsou všechny komplexní vlastní vektory matice B.

(c) Rozvojem podle posledního sloupce určíme charakteristický polynom matice C

$$\det(C-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -3 & 0\\ 3 & -1-\lambda & 0\\ 4 & 7 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}5-\lambda & -3\\ 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

Našli jsme vlastní číslo 1 algebraické násobnosti 1 a vlastní číslo 2 algebraické násobnosti 2. Obvyklým postupem najdeme vlastní vektory příslušné vlastním číslům 1 a 2:

$$\mathbf{M}_1=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}5-1 & -3 & 0\\ 3 & -1-1 & 0\\ 4 & 7 & 1-1\end{pmatrix}=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 7 & 0\end{pmatrix}=\mathrm{LO}\left\{(0,0,1)^T\right\},$$

$$\mathbf{M}_2=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}5-2 & -3 & 0\\ 3 & -1-2 & 0\\ 4 & 7 & 1-2\end{pmatrix}=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}3 & -3 & 0\\ 3 & -3 & 0\\ 4 & 7 & -1\end{pmatrix}=\mathrm{LO}\left\{(1,1,11)^T\right\},$$

našli jsme vlastní vektory $\mathrm{LO}\left\{(0,0,1)^T\right\}\cup\mathrm{LO}\left\{(1,1,11)^T\right\}$. Opět si povšimněme, že z nich nelze vybrat bázi prostoru $\mathbb{C}^3$. □

Úloha 5.5. Pro matici

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ najděte všechna vlastní čísla, jejich algebraické násobnosti a všechny vlastní vektory.

Řešení. Nejprve hledáme nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ kořeny polynomu $p(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=4\lambda^3+4\lambda^2+2$. Prostým dosazením zjistíme, že $p(0)=2$, $p(1)=0$, $p(2)=0$, $p(3)=1$ a $p(4)=2$. Proto jsou 1 a 2 vlastní čísla matice A a jiná vlastní čísla tato matice nemá. Abychom zjistili jejich algebraické násobnosti, vydělíme polynom $p(\lambda)$ polynomem $(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2+2\lambda+2$. Dostaneme $(4\lambda^3+4\lambda^2+2):(\lambda^2+2\lambda+2)=4(\lambda+4)$, takže $p(\lambda)=4(\lambda+4)^2(\lambda+3)$. Vlastní číslo 1 má tedy algebraickou násobnost 2 a vlastní číslo 2 má algebraickou násobnost 1. Nakonec určíme vlastní vektory příslušné těmto vlatním číslům. Řešíme homogenní soustavy rovnic s maticemi

$$A-1\cdot I_3=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad\text{a}\quad A-2\cdot I_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 4 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Dostaneme, že například vektory $(1,0,1)^T$ a $(0,1,0)^T$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 1 a vektor $(1,3,4)^T$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu 2. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 5.6. Určete všechna vlastní čísla a vektory lineárního operátoru D na prostoru všech reálných polynomů v proměnné x, který polynomu p přiřazuje jeho první derivaci p'.

Řešení: Jediným vlastním číslem je 0 a jedinými vlastními vektory jsou konstantní polynomy.

Úloha 5.7. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a vlastní vektory lineárního operátoru f na reálném vektorovém $\mathbb{R}^3$, jestliže

$$\text{(a)}\quad f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\ -x_1+2x_2-x_3\\ -2x_1+x_2+x_3\end{pmatrix},\ \text{(b)}\quad f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2-x_3\\ 2x_2+x_3\\ x_3\end{pmatrix},\ \text{(c)}\quad f\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2-x_3\\ x_2+x_3\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Řešení: (a) Vlastní čísla: $0, 1, 2$ (všechna alg. násobnosti 1) , vlastní vektory: $\mathrm{LO}\left\{(1,1,1)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(1,2,1)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(1,1,-1)^T\right\}$,

(b) vlastní čísla: 1 (alg. násobnosti 2) a 2 (alg. násobnosti 1), vlastní vektory: $\mathrm{LO}\left\{(1,0,0)^T, (0,-1,1)^T\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{(-1,1,0)^T\right\}$,

(c) vlastní číslo: 1 (alg. násobnosti 3), vlastní vektory: $\mathrm{LO}\left\{(1,0,0)^T\right\}$.

Úloha 5.8. Určete koeficienty u λ^4, λ^3 a konstantní koeficient charakteristického polynomu reálné matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení: 1 u λ^4, -3 u λ^3, -24 u λ^0.

Úloha 5.9. Matice lineárního operátoru na $\mathbb{Z}_3^3$ vhledem k bázi B je A. Určete vlastní čísla (i s algebraickými násobnostmi) a příslušné vlastní vektory operátoru f, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Řešení: Vlastní číslo: 0 (alg. násobnosti 1), vlastní vektory: $\mathrm{LO}\left\{(2,1,0)^T\right\}$.

Úloha 5.10. Jaký je vztah mezi množinami vlastních čísel čtvercové matice A a matice A^T? Najděte alespoň jeden nenulový vlastní vektor libovolné permutační matice. Najděte všechna vlastní čísla a všechny vlastní vektory horní trojúhelníkové matice, jejíž diagonální elementy jsou všechny nulové a elementy nad diagonálou všechny nenulové.

Řešení: Jsou stejné; $(1,1,\ldots,1)^T$; 0 a $\mathrm{LO}\{e_1\}$.

Úloha 5.11. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ je nenulový vektor. Najděte všechna vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru $s_{\mathbf{u}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definovaného pomocí vektorového součinu jako $s_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) := \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Řešení: 0 a $\mathrm{LO}\{\mathbf{u}\}$.