Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Řešení
Verze ze dne 24. března 2022

7 Diagonalizovatelnost (2. část)

Cíle cvičení:

- Procvičit rychlé rozhodování, zda je matice diagonalizovatelná,
- počítat mocniny diagonalizovatelných matic,
- naučit se řešit lineární dynamické systémy.

Řešené příklady:

Úloha 7.1. Nechť ψ je lineární operátor na vektorové prostoru $\mathbb{R}^3$ daný předpisem

$$\psi((x,y,z)^T) = (x+2y+z, 2x-y+2z, -2y)^T.$$

(a) Ověřte, že je lineární operátor ψ diagonalizovatelný,

(b) najděte bázi B, vůči níž má lineární operátor ψ diagonální matici,

(c) najděte pro každé $n \in \mathbb{N}$ matici lineárního operátoru ψ^n a matici ψ^{154} vzhledem ke kanonické bázi,

Řešení. (a) Nejprve určíme matici lineárního operátoru

$$[\psi]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

vzhledem ke kanonické bázi K_3 a poté najdeme její vlastní čísla. Protože máme tři různá vlastní čísla 0, 1 a -1 a různým vlastním číslům příslušné vlastní vektory jsou lineárně nezávislé, existuje báze složená z vlastních vektorů, a proto je lineární operátor ψ diagonalizovatelný.

(b) Najdeme množinu vlastních vektorů

$$M = [M]_{K_3} = \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathrm{LO}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

jako jako jádra matic homogenních soustav s maticemi

$$[\psi]_{K_3}^{K_3} - 0I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\psi]_{K_3}^{K_3} - 1I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\psi]_{K_3}^{K_3} + 1I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyní dostáváme $[\psi]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pro bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ tvořenou vlastními vektory příslušnými různým vlastním číslům.

(c) Uvědomíme si, že $[\psi^n]_B^B = ([\psi]_B^B)^n$, proto

$$[\psi^{2k+1}]_B^B = ([\psi]_B^B)^{2k+1} = \begin{pmatrix} 1^{2k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [\psi]_B^B,$$

$$[\psi^{2k}]_B^B = ([\psi]_B^B)^{2k} = \begin{pmatrix} 1^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = [\psi^2]_B^B.$$

Tudíž $[\psi^{2k+1}]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a $[\psi^{154}]_{K_3}^{K_3} = [\psi^{2k}]_{K_3}^{K_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. $\square$

Úloha 7.2. Ověřte, že je reálná matice A regulární a diagonalizovatelná nad $\mathbb{C}$ a spočítejte pro každé celé z matici A^z, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. (a) Nejprve spočítáme charakteristický polynom $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$ matice A, její vlastní čísla 1 a 3 a příslušné podprostory vlastních vektorů:

$$\mathbf{M}_1 = \text{Ker } (A - I_2) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{LO}\{(1, -1)^T\},$$

$$\mathbf{M}_3 = \text{Ker } (A - 3I_2) = \text{Ker } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{LO}\{(1, 1)^T\},$$

Protože má matice A dvě nenulová reálná vlastní čísla, je regulární a diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$. Z vlastních vektorů matice A sestavíme bázi $B = \big((1, -1)^T, (1, 1)^T\big)$ prostoru $\mathbb{R}^2$ a uvážíme matici přechodu

$$P := [\text{Id}]_{K_2}^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro tu platí rovnost

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Snadno určíme matici

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a poté spočítáme, že

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Protože platí

$$A^0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} P^{-1} = PP^{-1} = I.$$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}^n P^{-1}.$$

vidíme, že vztah (**??**) platí i pro každé n z oboru celých čísel.

(b) Opět zjistíme vlastní čísla $2i$ a $-2i$ jako kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 4$. Máme dvě nenulová komplexní vlastní čísla, proto je matice regulární a nad komplexními čísly diagonalizovatelná. Při hledání vlastního vektoru k vlastnímu číslu $2i$ počítáme řešení homogenní soustavy rovnic s maticí

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -5 \\ 1 & -1-2i \end{pmatrix}.$$

Víme, že soustava má netriviální řešení, tedy řádky jsou nutně lineárně závislé. Můžeme tedy počítat jen s jednou z rovnic, např. $\begin{pmatrix} 1 & -1-2i \end{pmatrix}$. Její řešení $\begin{pmatrix} 1+2i & 1 \end{pmatrix}^T$ vidíme ihned. Stejně vypočteme druhý vlastní vektor, nebo si uvědoměním, že pro reálnou matici platí $\overline{A\,\mathbf{x}} = \overline{\lambda\,\mathbf{x}} \Rightarrow \overline{A}\overline{\mathbf{x}} = A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}$ a vektory musí být komplexně sdružené (pro podrobnosti vizte tvrzení 9.73 ve skriptech). Máme tedy bázi $B = \left(\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ prostoru $\mathbb{C}^2$ složenou z vlastních vektorů matice A. Z ní vytvoříme matici přechodu $P := [\mathrm{Id}]^B_{K_2} = \begin{pmatrix} 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ a inverzní matici přechodu $P^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix}$. Nyní obdobně jako v úloze (a) spočítáme

$$A^z = \frac{i}{4} \begin{pmatrix} 1-2i & 1+2i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2i)^z & 0 \\ 0 & (2i)^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ -1 & 1-2i \end{pmatrix} =$$

$$= (2)^{z-2} i^{z+1} \begin{pmatrix} (-1)^z(1-2i) - (1+2i) & 5((-1)^{z-1}+1) \\ (-1)^z - 1 & (-1)^{z-1}(1+2i) + (1-2i) \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že $A^{2k} = \begin{pmatrix} (-4)^k & 0 \\ 0 & (-4)^k \end{pmatrix} = (-4)^k I_2$ a $A^{2k+1} = (-4)^k \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

Nakonec poznamenejme, že mnohem jednodušší způsob řešení úlohy nám umožní Cayleyho-Hamiltonova věta (ve skriptech s číslem 9.119), z níž pro charakteristický polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 4$ dostáváme vztah $A^2 + 4I_n = 0$, z kterého snadno odvodíme vzorečky $A^{2k} = (-4)^k I_n$ a $A^{2k+1} = (-4)^k A$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. □

Úloha 7.3. Vyřešte diskrétní lineární dynamický systém

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_n$$

nad $\mathbb{R}^2$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 = (3, -3)^T$.

Řešení. Spočítáme charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)$ matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, její vlastní čísla $-2, 2$ a regulární matici $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ s vlastními vektory ve sloupcích, pro níž platí

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Dále určíme, že $P^{-1}\mathbf{x}_0 = \frac{3}{2}(1,1)^T$. Nyní již snadno dopočítáme, že $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0 = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}\mathbf{x}_0 =$

$$= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} (-2)^n + 2^n \\ -3(-2)^n + 2^n \end{pmatrix} = 3 \cdot 2^{n-1} \begin{pmatrix} (-1)^n + 1 \\ 3(-1)^{n-1} + 1 \end{pmatrix}.$$

□

Úloha 7.4. Najděte vzorec pro n-tý člen reálné posloupnosti a_n, jestliže

$$a_0 = 4, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že rekurentní vztah můžeme vyjádřit pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

Nyní potřebujeme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalizovat. Snadno najdeme její charakteristický polynom $\lambda^2 - \lambda - 2$, poté vlastní čísla $-1, 2$ a regulární matici $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ s vlastními vektory ve sloupcích, pro niž platí rovnost

$$A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nyní jako řešení nehomogenní soustavy rovnic spočítáme součin $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{3} \\ 0 & 1 & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

a dopočítáme $a_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{5\cdot(-1)^n + 7\cdot 2^n}{3}$. □

Další základní příklady k počítání:

Úloha 7.5. Ověřte, že je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

regulární diagonalizovatelná a spočítejte A^z pro všechna $z \in \mathbb{Z}$.

Řešení: $A^z = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{4^z}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^z + 2 & 4^z - 1 & 4^z - 1 \\ 4^z - 1 & 4^z + 2 & 4^z - 1 \\ 4^z - 1 & 4^z - 1 & 4^z + 2 \end{pmatrix}$.

Úloha 7.6. Najděte explicitní vzorec pro a_n v následující posloupnosti reálných čísel.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 6a_{n-1} - 5a_{n-2} \text{ pro } n \geq 2.$$

Řešení: $a_n = \frac{3+5^n}{4}$.

Úloha 7.7. Vyřešte diferenční rovnici (diskrétní lineární dynamický systém) $\mathbf{x}_{k+1} = A\,\mathbf{x}_k$ s počátečním vektorem $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $\mathbf{x}_k = 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Obtížnější úloha:

Úloha 7.8. Vyřešte pro počáteční podmínky $u_1(0) = 2$ a $u_2(0) = 3$ soustavu diferenciálních rovnic, kde neznámé jsou reálné funkce reálné proměnné splňující:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 + u_2 \\ u_2' &= -2u_1 + 4u_2 \end{aligned}$$

Řešení: $u_1 = e^{2t} + e^{3t}$, $u_2 = e^{2t} + 2e^{3t}$.