Cvičení k přednášce NMAG112 Lineární algebra 2

Zadání

Verze ze dne 21. dubna 2022

10 Unitární diagonalizace

Cíle cvičení:

- Procvičit hledání ortonormálních bází složených z vlastních vektorů operátorů a matic.

Při řešení úloh přemýšlejte nad tím, jak vám v řešení může pomoci to, že o některých maticích víme, že jsou unitárně diagonalizovatelné, a tedy podprostory vlastních vektorů jsou navzájem kolmé.

V úlohách 10.1–10.3 je možné se vyhnout počítání charakteristických polynomů matic typu 3×3. (Je nějaké vlastní číslo vidět? Je matice singulární?)

Až si zopakujete Gramovu-Schmidtovu ortogonalizaci, vzpomeňte si, jak lze počítat ortogonální bázi jádra matice přímo, jen s pomocí řešení soustav rovnic.

Řešené příklady:

Úloha 10.1. Najděte reálnou ortogonální matici U, pro níž je $U^T AU$ diagonální, jestliže

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úloha 10.2. Najděte pro reálnou matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ortonormální bázi B reálného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ tak, aby byla matice $[f_A]_B^B$ diagonální.

Úloha 10.3. Pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -1 \\ 1+i & 2 & -1-i \\ -1 & -1+i & 1 \end{pmatrix}$$

najděte unitární matici U tak, aby matice byla $U^* AU$ diagonální.

Úloha 10.4. Napište lineární operátor f na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem jako lineární kombinaci ortogonálních projekcí na přímku, jestliže

$$\text{(a) } n = 2 \text{ a } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - x \\ 3x + 7y \end{pmatrix}, \qquad \text{(b) } n = 3 \text{ a } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y + 2z \\ 2x + 5y + 2z \\ 2x + 2y + 5z \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: matice jsou nápadně podobné těm v úloze 10.1)

Další základní příklady k počítání:

Úloha 10.5. Zjistěte, zda jsou komplexní matice A, B normální.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ 1-2i & 3-i \end{pmatrix}, \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}.$$

Úloha 10.6. Ukažte, že je reálná matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ortogonálně diagonalizovatelná, najděte reálnou ortogonální matici U, pro níž je $U^T AU$ diagonální a součin $U^T AU$ určete.

Úloha 10.7. Uvažujme endomorfismus

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$$

na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte takovou ortonormální bázi B, pro kterou je matice $[f]_B^B$ diagonální, a tuto matici najděte.