Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 102: Lineární algebra a geometrie 2, letní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 7.5.2014 15:30

(10.1) Nechť f je bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ charakteristiky různé od 2. Dokažte, že f je antisymetrická právě tehdy, když je příslušná kvadratická forma f_2 nulová (tj. pro každé $\mathbf{v} \in V$ platí $f_2(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$).

Nápověda: Pro důkaz implikace zprava doleva si stačí rozepsat výraz $f_2(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

Je-li f symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$ a $U \subseteq \mathbf{V}$, pak f-ortogonálním doplňkem množiny U rozumíme množinu

$$U^{\perp_f} = \{\mathbf{x} \in V : (\forall \mathbf{u} \in U)\ f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0\} \ .$$

(10.2) Bilineární forma f na prostoru $\mathbb{R}^3$ má vzhledem ke kanonické bázi matici

$$[f]_K = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \ .$$

Spočítejte f-ortogonální doplněk množiny

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\} \ .$$

Nápověda: Ukažte, že ortogonální doplněk podprostoru $W = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle$ je roven množině všech vektorů, které jsou f-ortogonální ke všem generátorům $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$. Najděte nějakou množinu generátorů podprostoru U a použijte učiněné pozorování.

Bonusový problém: Ukažte, že pro každou antisymetrickou bilineární formu na konečně generovaném reálném vektorovém prostoru existuje báze B taková, že matice $[f]_B$ je blokově diagonální, složená z bloků

$$(0), \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$